ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS PARA EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN EN EL CURSO DE ÁLGEBRA Y FUNCIONES DE LA UNIVERSIDAD ICESI

CARLOS ALBERTO QUINTERO LONDOÑO

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE INGENIERÍA Y ADMINISTRACIÓN
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
PALMIRA
2011

ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS PARA EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN EN EL CURSO DE ÁLGEBRA Y FUNCIONES DE LA UNIVERSIDAD ICESI

CARLOS ALBERTO QUINTERO LONDOÑO

Trabajo Final presentado como requisito parcial para optar al título de Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director: Oscar Alonso Herrera Gutiérrez
Magister en Agronomía

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE INGENIERÍA Y ADMINISTRACIÓN
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
PALMIRA
2011

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SEDE PALMIRA

FACULTAD DE INGENIERÍA Y ADMINISTRACIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS AGROPECUARIAS

ACTA DE JURADO DE TRABAJO FINAL

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

En Palmira, a los 07 días del mes de Diciembre de 2011, se reunió en esta Sede el jurado evaluador del trabajo final, integrado por los docentes: LUCY JANETH MEDINA BEJARANO Y ROOSEVELT MORENO RODRÍGUEZ.

Para calificar el trabajo final de maestría de:

CARLOS ALBERTO QUINTERO LONDOÑO

Titulado:

"ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS PARA EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN EN EL CURSO DE ÁLGEBRA Y FUNCIONES DE LA UNIVERSIDAD ICESI" bajo la dirección del docente Oscar Alonso Herrera Gutiérrez.

Después de oír el informe del jurado evaluador compuesto por los docentes LUCY JANETH MEDINA BEJARANO Y ROOSEVELT MORENO RODRÍGUEZ y de haber cumplido con el proceso de evaluación, el trabajo final fue calificado como:

APROBADO X

REPROBADO:______

Lucy Medina B.

LUCY JANETH MEDINA BEJARANO

ROOSEVELT MORENO RODRÍGUEZ

DEDICATORIA

El autor de este trabajo, dedica éste a su esposa, Natividad Salamanca; a su padre, Víctor Manuel Quintero; y a la memoria de su madre, Libia Londoño.

AGRADECIMIENTOS

El autor de este trabajo agradece a su Director, M.S.c. Oscar Alonso Herrera, la revisión y los valiosos aportes hechos al contenido de dicho trabajo. El Señor Herrera se desempeña como Docente Ocasional de la Universidad Nacional de Colombia Sede Palmira.

De igual manera se hace un reconocimiento al Dr. Alfonso Bustamante, jefe del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad Icesi, por facilitar la ejecución de las estrategias didácticas de que trata este trabajo, y por la revisión hecha al material didáctico elaborado para el desarrollo del tema: Funciones. Definición y conceptos relacionados.

Por último, se destaca la orientación en la planeación y ejecución hecha a este trabajo, por Hendel Yaker, quien se desempeña como Profesor Tiempo Completo de la Universidad Icesi.

CONTENIDO

LISTA DE CUADROS

pág.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ANEXOS

INTRODUCCIÓN

Este Trabajo Final de Maestría trata del diseño e implementación de algunas estrategias didácticas que promuevan el adecuado aprendizaje del concepto de función en los estudiantes del curso de Álgebra y Funciones de la Universidad Icesi. La metodología general empleada fue del tipo pre-experimental (Pre-test / post-test).

El autor del trabajo, motivado por los aportes recibidos en el primer semestre de la Maestría en la enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, y más específicamente, en el curso de Ambientación en Ciencias, Matemáticas y Trabajo virtual, eligió este problema dado que su desempeño en el curso de Álgebra y Funciones, curso en el cual se trata el concepto de función por primera vez en la Universidad, se constituye en una magnífica oportunidad para abordar de raíz el problema del bajo nivel de apropiación del concepto de función de los estudiantes de la Universidad, y contribuir a una posible solución. La importancia de este trabajo radica en que aborda un concepto fundamental en Matemáticas, y se constituye en un aporte didáctico que hace su autor a la Universidad.

El trabajo se adelantó en la Universidad Icesi, ubicada en la zona urbana de Cali, calle 18 No 122-135.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Las directivas de la Universidad Icesi, el jefe del Departamento de Matemáticas y Estadística, y los docentes de los cursos de Álgebra Lineal, Cálculo de Una Variable y Cálculo de Varias Variables, están muy preocupados por el bajo nivel de apropiación del concepto de función que evidencian los estudiantes en los cursos mencionados. Esto se constituye en un indicador de que hay un problema de formación en Matemáticas que posiblemente proviene de metodologías de enseñanza erradas y poco motivantes para los estudiantes de primer semestre del curso de Álgebra y Funciones.

Los profesores del Departamento de Matemáticas y Estadística, y de los cursos de economía, mencionan que el bajo nivel en la apropiación del concepto de función de los estudiantes, se hace manifiesto en las dificultades que tienen en dar significado a los símbolos propios de la notación funcional; en las falencias que presentan en el momento de leer e interpretar la gráfica de una o más funciones; en la poca capacidad que tienen para obtener un modelo; en el desconocimiento

de las variables que están siendo relacionadas y cómo es esta relación; en la falta de determinación del dominio de una función; en las dificultades que tienen para establecer relaciones entre las distintas representaciones de una función (fórmulas, gráficas, lenguaje verbal); y en la poca capacidad que tienen para transferir el concepto de función a diferentes contextos.
En efecto, los estudiantes tienen dificultades en dar significado a los símbolos $y = f(x)$, $x \to y$, $f(x+h)$, $\left(a, f(a)\right)$, $z = f(x,y)$ y $f: A \to B$ entre otros. También presentan dificultades al interpretar la gráfica de una función; esto se hace manifiesto cuando intentan determinar los intervalos donde una función es positiva (o negativa) o donde es creciente (o decreciente); cuando tratan de determinar si una función es mayor (o menor) que otra; cuando buscan determinar las variables representadas en los ejes; cuando pretenden identificar los puntos de la gráfica (dado un valor de una de las variables, hallar "el" valor correspondiente de la otra); y cuando intentan identificar si un punto dado por sus coordenadas pertenece o no a la gráfica; y otra debilidad que evidencian los estudiantes es la resolución de ejercicios y problemas de aplicación que involucran el concepto de función en distintos contextos.

FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Frente a las dificultades señaladas en la comprensión del concepto de función, el trabajo se propuso: **Diseñar e implementar algunas estrategias didácticas que promuevan el adecuado aprendizaje del concepto de función en los estudiantes del curso de Álgebra y Funciones de la Universidad Icesi**. Se apoya en la idea de que cualquier estudio que se haga del concepto de función, debe pasar, en primera instancia, por un conocimiento de los lenguajes de las posibles representaciones de una función; y en segunda instancia, por la traducción de uno a otro lenguaje.

JUSTIFICACIÓN

El curso de Álgebra y Funciones es prerrequisito de los cursos de Álgebra Lineal y de Cálculo de Una Variable, y éste es prerrequisito del curso de Cálculo de Varias Variables. En el curso de Álgebra Lineal se estudian temas que se apoyan en el concepto de función; temas tales como ecuación paramétrica de una recta en el espacio, ecuación de un plano en el espacio, transformación lineal de un espacio vectorial en otro espacio vectorial, núcleo e imagen de una transformación lineal. En el curso de Cálculo de Una Variable, se estudian los conceptos de límite, continuidad, derivada e integral de funciones reales de variable real. Por su parte en el curso de Cálculo de Varias Variables se estudian algunos tipos especiales de funciones, tales como sucesiones y series. También se estudia la representación de funciones en series de potencias, funciones vectoriales y funciones de varias variables. Por lo tanto, el concepto de función es fundamental para abordar el estudio de otras asignaturas.

En la Universidad Icesi se implementa el modelo de aprendizaje activo. Modelo en el cual se asume que el aprendizaje es el resultado de un proceso de construcción del conocimiento que tiene como centro al estudiante y como guía al profesor. Un elemento fundamental en este modelo es la discusión que se debe generar en clase; discusión en la cual el profesor interviene esencialmente como guía y moderador, además de que es quien hace la síntesis final para socializar el conocimiento consolidado en clase.

Este modelo exige el diseño e implementación de estrategias didácticas que partan de situaciones concretas y lleven al estudiante a experimentar procesos de construcción de conceptos, como el de función. De esto se deduce que es necesario elaborar un material didáctico que contenga tales situaciones.

Desafortunadamente, los textos de Matemáticas a nivel universitario y en particular, los que se emplean en primer semestre, son escritos pensando en una clase magistral (clase en la cual el profesor tiene como única función transmitir conocimientos). Estos textos tienen un estilo de escritura que parte de la formalización de los conceptos (definiciones y teoremas) para llegar a la solución de algunas situaciones particulares, negando así la posibilidad de que el estudiante sea quien construya el concepto definido o el teorema establecido. Este estilo de escritura supone que los estudiantes que llegan a primer semestre de Universidad tienen un alto nivel de abstracción, pero la experiencia muestra lo contrario. Por lo tanto, de la manera como se desarrolle el concepto de función, depende: El nivel de apropiación de los estudiantes respecto a dicho concepto, y los resultados que se obtengan en el estudio de los temas que se fundamenten en dicho concepto; temas tales como: Función lineal, función cuadrática, función exponencial, función logarítmica, funciones trigonométricas.

OBJETIVOS

Objetivo General

Diseñar e implementar algunas estrategias didácticas que promuevan el adecuado aprendizaje del concepto de función en los estudiantes del curso de Álgebra y Funciones de la Universidad Icesi.

Objetivos Específicos

- Identificar algunos medios apropiados para realizar el proceso de enseñanza aprendizaje del concepto de función en el salón de clase.
- Definir las actividades para lograr la retención y transferencia del aprendizaje del concepto de función.
- Definir las actividades de aprendizaje del concepto de función que los estudiantes deberán realizar para procesar los materiales didácticos elaborados para tal fin.

1 MARCO REFERENCIAL

1.1 MARCO TEÓRICO

Existen varias formas de representar una función. A este respecto Azcárate y Deulofeu (1) mencionan que una función se puede representar a través de un modelo físico (o simulación), una descripción verbal, una tabla de valores, una gráfica o una fórmula. A este respecto, dicen que el modelo físico o simulación es el lenguaje más cercano al fenómeno estudiado, el menos simbólico y que aparece al realizar el experimento o al simularlo en un computador.

Y siguen diciendo que: La descripción verbal emplea un lenguaje común que permite dar una visión descriptiva y generalmente cualitativa de la relación funcional; la tabla de valores da una visión cuantitativa, de fácil interpretación, desde la perspectiva de una correspondencia; y los dos lenguajes de mayor abstracción, y por lo tanto más complejos de interpretar, son la gráfica y la fórmula. Estos permiten una visión global y completa de la función estudiada, tanto cualitativa como cuantitativa.

Encontrar una definición de función que sea útil y operativa, no es fácil. A este respecto, Azcárate y Deulofeu (1) manifiestan que existen cuatro maneras de ver una función, a saber: Como una correspondencia entre valores de variables, una correspondencia entre elementos de dos conjuntos, dependencia entre variables, y conjunto de pares ordenados. Y siguen diciendo que cuando se considera una función desde la óptica de variable, el papel del dominio no es tan relevante.

Una dificultad que presenta la adquisición del concepto de función, la constituye la representación a través de la fórmula o ecuación $y = f(x)$. En este sentido, los autores mencionados afirman que el trabajo con variables generales debe estar antecedido del trabajo con variables concretas.

Estos autores afirman que la adquisición del concepto de función depende en gran parte de la capacidad para leer e interpretar cada uno de los lenguajes de representación de dicho concepto, es decir, el aprendizaje de funciones pasa, en primera instancia, por cada uno de los lenguajes de representación que éstas tienen; y en segunda instancia, por la capacidad para traducir de un lenguaje a otro.

Desafortunadamente, gran parte de los textos solo exigen dos procesos de traducción. Azcárate y Deulofeu (1) afirman que la mayoría de los textos proponen solo ejercicios del tipo "Construya la gráfica de la función definida por la fórmula $y = f(x)$". Este tipo de ejercicios tiene como objetivo que los alumnos construyan una tabla de valores a partir de la fórmula dada, y que a partir de los valores de la tabla construyan la gráfica.

Tal tipo de ejercicios deja de lado otros procesos de traducción, es decir, rara vez se les da a los alumnos la gráfica de una función para indagarles por la ecuación que la define; o para solicitarles que determinen si un punto, dadas sus coordenadas, pertenece o no a la gráfica de la función. A este respecto, los autores ya citados (1) mencionan que los procedimientos de lectura y construcción de tablas, y de lectura e interpretación de gráficas, se pueden abordar, y traen consigo una introducción al concepto de función a partir de situaciones reales que sirven de soporte concreto para la elaboración de dicho concepto.

Una buena manera de explotar la tabla de valores de una función, consiste en solicitarle al estudiante que la complete; lo cual le exigirá reconocer el modelo y encontrar la ecuación que describe la situación. Al respecto, Azcárate y Deulofeu (1) afirman que si bien es cierto, que reconocer el modelo y establecer la ecuación son actividades que requieren abstraer la regla de dependencia entre las dos variables; la segunda actividad implica un conocimiento del lenguaje algebraico y del hecho, que una fórmula de dos variables represente una función, por lo que resulta más difícil. Estos autores mencionan la investigación de Carpenter, en la cual éste propone a un grupo de estudiantes completar los valores faltantes de una serie de datos apareados (Cuadro 1).

Cuadro 1. Tabla de Carpenter.

x	1	3	4	7	n
y	8		11	14	

Fuente: AZCÁRATE. Carmen y DEULOFEU. Jordi. Funciones y gráficas. Madrid. Síntesis, 1996. p. 81.

Esta experiencia mostró que la mayoría de los estudiantes encontró el valor de y cuando $x = 3$; pero sólo una minoría pudo encontrar el valor de y cuando $x = n$.

Según estos autores, la representación de una función a través de su gráfica cartesiana, permite a los alumnos hacer un trabajo tanto de lectura como de interpretación de dicha gráfica. En efecto, los alumnos pueden determinar las variables representadas en los ejes, identificar los puntos de la gráfica (dado un valor de una de las variables, hallar "el" valor correspondiente de la otra), identificar si un punto dado por sus coordenadas pertenece o no a la gráfica, y considerar intervalos en los que se mantiene o se modifica de una determinada manera la variación de la función.

Y mencionan que: "Cuando una función está expresada por medio de una tabla de valores, los estudiantes pueden construir la gráfica, reconocer un modelo que les permita hallar otros valores de la tabla, y establecer la fórmula o ecuación de la función".

1.2 MARCO TECNOLÓGICO

Existen varios programas para trabajar conceptos matemáticos; uno de ellos es GeoGebra. Con respecto a este programa, Berenguer *et al* (2), dicen que tiene un enorme potencial para trabajar, de manera sencilla, con representaciones gráficas y permite ver cómo se definen, cómo se generan, cómo se representan y cómo se mueven las gráficas. En efecto, GeoGebra permite hacer construcciones básicas (rectas, círculos, segmentos), evidenciar las relaciones en las construcciones (intersecciones, paralelismo, perpendicularidad, proyecciones) y comprobar el efecto que en las gráficas de las curvas genera la modificación de alguno de los parámetros que las definen. Este último hecho hace que las figuras dejen de ser estáticas para convertirse en dinámicas.

En el mismo sentido, hay varias plataformas que se pueden utilizar en la enseñanza; una de ellas es Moodle. Con respecto a esta plataforma, Ros (10) dice que presenta tres grandes recursos, a saber: Gestión de contenidos, comunicación y evaluación. En efecto, esta plataforma se puede emplear para presentar a los estudiantes los apuntes de un curso, comunicar al profesor con sus alumnos y fomentar el trabajo cooperativo a través de foros, enviar tareas a los estudiantes, evaluar a los estudiantes con cuestionarios de temas específicos con retroalimentación inmediata a los alumnos de su resultado.

1.3 MARCO CONCEPTUAL

Según Azcárate y Deulofeu (1), el desarrollo histórico del concepto de función se puede examinar en tres grandes períodos, a saber: El mundo antiguo, la edad media y el período moderno.

Estos autores manifiestan que de las matemáticas del mundo antiguo, específicamente de Babilonia y Egipto, es poco lo que se puede decir porque los documentos conocidos no van más allá de una aritmética y una geometría elementales y de carácter empírico; y si bien los babilonios incursionaron en el terreno del álgebra, el hecho de que el material conocido se reduzca casi siempre a tablas de cómputo y a colecciones de problemas resueltos, muchos de ellos de tipo práctico, sin explicación de métodos, ni justificación alguna de los mismos; se hace difícil encontrar aspectos relevantes que permitan intuir la existencia de conceptos como variable o función.

Y siguen diciendo que en la edad media, a pesar de que aparecen explícitas ciertas nociones generales, ya sea en forma mecánica o geométrica, cada caso concreto de dependencia entre dos cantidades variables se expresa mediante una descripción verbal o a lo sumo, mediante un gráfico, quedando todavía muy relegada la determinación de leyes cuantitativas de los fenómenos de cambio estudiados. En este período se destaca, por un lado, el cambio de mentalidad que empezó a producirse en el estudio de los fenómenos naturales, como por ejemplo, el movimiento, en Francia e Inglaterra; y los aportes de Oresme, quien realizó los primeros intentos de representación gráfica de dependencia entre dos variables.

Con respecto al período moderno, que inicia a finales del siglo XVI, estos autores afirman que se puede considerar como el de la aparición del concepto de función con aproximaciones cada vez más amplias y generales, el estudio del movimiento se constituyó en un problema esencial. En este mismo período el descubrimiento de la geometría analítica, permitió el desarrollo de las expresiones algebraicas de funciones.

Finalmente, dichos autores aseveran que el término función aparece por primera vez en un manuscrito de Leibniz de 1673. Si bien inicialmente tiene un significado muy particular, pues se refiere a un problema de cálculo de ordenadas a partir de cierta propiedad de las tangentes, posteriormente, en 1694, utiliza la palabra en un sentido más general, aunque todavía poco preciso, y referido como siempre a cuestiones de geometría diferencial.

Hoy en día, se acepta a escala global la siguiente conceptualización con respecto al tema de funciones.

FUNCIÓN: “Una función está formada por: Un dominio (conjunto de partida), un conjunto de llegada, una regla tal que a cada elemento del dominio le hace

corresponder un elemento único del conjunto de llegada" (Azcárate y Deulofeu (1)).
GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN: Si f es una función que tiene como dominio al conjunto A, entonces la gráfica de f es el conjunto formado por todas las parejas ordenadas $(x, f(x))$, donde x es un elemento cualquiera del dominio A.

LECTURA DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN: Es la identificación de las variables representadas en cada uno de los ejes, identificación de los puntos de la gráfica, identificar si un punto dado por sus coordenadas pertenece o no a la gráfica.

INTERPRETACIÓN DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN: "Es la capacidad para describir la función representada de forma global, atendiendo a las características generales de la gráfica, es decir, a las variaciones que presenta. En lugar de puntos determinados será necesario considerar intervalos en los que se mantiene o se modifica de una determinada manera la variación de la función" (Azcárate y Deulofeu (1)).

ESTRATEGIA DIDÁCTICA: En el campo de la pedagogía, las estrategias didácticas se refieren al conjunto de acciones que pone en marcha el docente de forma ordenada para alcanzar unos determinados objetivos (Pérez (8)).

SITUACIÓN CONCRETA: Situación contextualizada (real o hipotética) en la que el estudiante observa, ensaya, conjetura, y establece relaciones y generalidades.

1.4 ESTADO DEL ARTE

Sierpinska (12) en su análisis sobre la noción de función, estableció diecinueve categorías para la comprensión de la misma. En su estudio se observan los análisis de las componentes cognitiva y epistemológica, incluyendo, además, aspectos como el de la motivación, conocimientos previos y formas de exposición.

Existen varias formas de motivar el aprendizaje. A este respecto, González (4) afirma que una buena manera de motivar el aprendizaje, consiste en relacionar el tema que se está desarrollando con el que ya se ha desarrollado y con el que se desarrollará después.

En el plano didáctico epistemológico, Ruiz (11) analizó las concepciones que presentan los estudiantes sobre la noción de función. Estudió el fenómeno de transposición didáctica, e identificó los obstáculos didácticos y cognitivos alrededor del concepto. Con ello evidenció que las concepciones de los estudiantes sobre el concepto de función, están muy relacionadas con su evolución histórica.

Guzmán (5) hizo una presentación sobre el aprendizaje por parte de los estudiantes de nociones relativas a funciones y el sentido que cobran en ellos; empleó un enfoque cognitivo sustentado en registros de representación semiótica y su incidencia en el aprendizaje de las propiedades de las funciones. A través de su análisis de respuestas, puso en evidencia el hecho de que no se ha dado la suficiente importancia a la relación que existe entre las diversas formas en que es posible representar una función. En general, los estudiantes emiten sus respuestas en el registro en que es formulada la pregunta, en la mayoría de los casos no coordinan dos o más.

Este autor concluye que esta deficiencia es una cuestión de aprendizaje y debe ser tomada en cuenta sobre lo que se está enseñando. También detectó la dificultad para relacionar, ya que los estudiantes no logran coordinar la lectura de un hecho expresado en un registro determinado y la expresión o formulación en lenguaje natural y, a la inversa, expresar un enunciado dado en lenguaje natural en términos de otro registro, y por supuesto los traslados del registro gráfico al algebraico.

García y Serrano (3) presentaron un estudio sobre el conocimiento profesional del concepto de función por parte de los docentes de matemáticas, en Educación Básica con reciente actualización en el tema. Los resultados indican una compleja y estrecha relación entre el significado que cada uno de los docentes concede al concepto y el significado institucional desarrollado por el programa de actualización, y cómo estas variables deben ser tomadas en cuenta para explicar los errores e inconsistencias de profesores y estudiantes.

Estas autoras concluyeron que, aun con la experiencia profesional de los docentes encuestados, no existe una aproximación a la comprensión racional, sino de tipo instrumental. No establecieron traslaciones entre las diferentes formas de representar una función, al dejar de lado la funcionalidad de este tránsito; ello les llevó a una dificultad al tratar de identificar o construir funciones de la vida cotidiana. No hay coherencia entre las definiciones formal e informal propuestas por ellas mismas, lo que conduce a que el significado personal, junto con las prácticas institucionales, no provea de sentido al concepto ni a sus prácticas en el aula.

Pluvinage y Cuevas (9) presentaron el concepto de función desde cuatro registros semióticos, a saber: Tablas numéricas, representaciones gráficas, teclas de calculadora y fórmulas explícitas. En esta investigación, los significados asociados al concepto aparecen como nociones relacionadas ya conocidas, cuya interacción en el aula deriva en acercamientos didácticos más completos que, es de suponer, llevan al entendimiento de la definición del concepto, enunciando éste a través de la dependencia entre variables, e involucrando elementos de la teoría de conjuntos.

2 DISEÑO METODOLÓGICO

El Trabajo Final de Maestría se llevó a cabo en la Universidad Icesi, la cual está ubicada al sur de la ciudad de Cali. Esta Universidad funciona desde el año 1979, y actualmente ofrece diecinueve programas de pregrado, siete maestrías, y seis programas de especialización.

El rector de la Universidad es el Dr. Francisco Piedrahita, quien ejerce este cargo desde 1996. La misión de la Universidad es reconocer la dignidad de toda persona, y adquirir un compromiso con el bienestar de la sociedad. De igual forma, su visión para el año 2014, es que la Universidad será reconocida por la sociedad colombiana como modelo de excelencia en el aprendizaje, la investigación y la intervención social.

Por último, el Proyecto Educativo de la Universidad Icesi tiene como finalidad contribuir en la formación de individuos: Autónomos, capaces de aprender por sí mismos, críticos, capaces de liderar cambios, y de espíritu empresarial.

El diseño que se empleó fue del tipo pre-experimental (pre-test / post-test), para lo cual se aplicó una prueba de entrada (Anexos 7 y 15) que permitió observar el nivel de aprendizaje del concepto de función con el que llegan los estudiantes a la Universidad Icesi (O_1). Posteriormente, se implementaron las estrategias didácticas de que trata este trabajo (X), y finalmente se volvió a aplicar la prueba de entrada, con el objetivo de observar el impacto que tuvo la implementación de las estrategias didácticas (O_2). Lo anterior se resume en el siguiente esquema:

Grupo testigo: O_1 X O_2.

2.1 POBLACIÓN

Estuvo constituida por quinientos estudiantes del curso de Álgebra y Funciones, de primer semestre de la Universidad Icesi.

2.2 MUESTRA

Estuvo constituida por cuarenta estudiantes de dos grupos del curso de Álgebra y Funciones, de la jornada diurna de primer semestre de la Universidad Icesi.

2.3 HIPÓTESIS

A manera de hipótesis de trabajo, se conjeturó que si se diseñan estrategias didácticas que promuevan el adecuado aprendizaje del concepto de función, entonces los estudiantes estarán en capacidad de: Dar significado a los símbolos propios de la notación funcional, leer e interpretar la gráfica de una o más funciones, obtener un modelo matemático a partir de una tabla de valores, determinar cómo varían ciertas magnitudes que dependen de otras, establecer relaciones (traducciones) entre las distintas representaciones de una función (lenguaje verbal, tabla de valores, gráfica, fórmula, y modelo físico o simulación), clasificar una función dada como inyectiva, sobreyectiva o biyectiva, y hallar la inversa de una función inyectiva.

Lo anterior significa que el adecuado aprendizaje del concepto de función, se evidencia en los estudiantes que:

- Dan significado a los símbolos propios de la notación funcional.
- Determinan cuando una regla de asignación entre los elementos de dos conjuntos, dada en cualquiera de sus posibles representaciones, constituye una función.
- Obtienen modelos a partir de una tabla de valores de una función.
- Determinan cómo varían ciertas magnitudes que dependen de otras.
- Leen gráficas de funciones.
- Interpretan gráficas de funciones.
- Establecen relaciones entre las distintas representaciones de una función.
- Clasifican una función como inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.
- Hallan la inversa de una función inyectiva.

En las hipótesis de trabajo, la variable dependiente fue: El adecuado aprendizaje del concepto de función.

2.4 OPERACIONALIZACIÓN DE LAS VARIABLES INDEPENDIENTES

Las variables independientes (Y sus respectivos indicadores) asociadas al adecuado aprendizaje del concepto de función que se estudiaron en el presente trabajo (Cuadro 2), fueron determinadas por el objetivo general, los objetivos terminales número cuatro; cinco y diez, y los objetivos específicos de formación académica de la unidad 4 (Funciones: Conceptos generales y conjuntos asociados a una función) del curso de Álgebra y Funciones de la Universidad Icesi (ver el programa de dicho curso en el Anexo 18[1]).

Cuadro 2. Variables independientes e indicadores.

Variable independiente	Unidad de análisis (U.A)	Valores	Indicador
Variable 1 (v.1): El estudiante da significado a los símbolos propios de la notación funcional	El estudiante	1. Da significado a los símbolos propios de la notación funcional 2. No da significado a los símbolos propios de la notación funcional	Dado los símbolos $f: A \to B, y = g(x)$, el estudiante será capaz de: Identificar el dominio y el codominio de f, hallar el dominio de g, encontrar el valor de $g(x+h)$, y determinar el par ordenado $(a, g(a))$
Variable 2 (v.2): El estudiante determina cuando una regla de asignación es una función	El estudiante	1. Determina cuando una regla de asignación es una función 2. No determina cuando una regla de asignación es una función	Dada una regla de asignación entre los elementos de dos conjuntos, en cualquiera de sus posibles representaciones, el estudiante será capaz de decidir si constituye una función
Variable 3 (v.3): El estudiante obtiene modelos a partir de una tabla de valores de una función	El estudiante	1. Obtiene modelos a partir de una tabla de valores de una función 2. No obtiene modelos a partir de una tabla de valores de una función	Dada una tabla incompleta de valores de una función, el estudiante será capaz de completarla, y escribir la fórmula matemática que define la función
Variable 4 (v.4): El estudiante determina cómo varían ciertas magnitudes que dependen de otras	El estudiante	1. Determina cómo varían ciertas magnitudes que dependen de otras 2. No determina cómo varían ciertas magnitudes que dependen de otras	Dado un problema, el estudiante será capaz de identificar las variables que están siendo relacionadas, determinar cómo es esta relación, y encontrar los valores admisibles de estas variables

[1] Los anexos se pueden consultar en el CD-ROM adjunto al texto del Trabajo Final de Maestría.

Cuadro 2. Continuación.

Variable independiente	Unidad de análisis (U.A)	Valores	Indicador
Variable 5 (v.5): El estudiante lee gráficas de funciones	El estudiante	1. Lee gráficas de funciones	Dada la gráfica de una función, el estudiante será capaz de identificar las variables representadas en cada uno de los ejes, determinar cuándo un punto pertenece o no a la gráfica, identificar los cortes con los ejes
		2. No lee gráficas de funciones	
Variable 6 (v.6): El estudiante interpreta gráficas de funciones	El estudiante	1. Interpreta gráficas de funciones	Dada la gráfica de dos funciones, el estudiante será capaz de hacer comparaciones, considerar intervalos en los que se mantienen o se modifican de una determinada manera la variación de las funciones
		2. No interpreta gráficas de funciones	
Variable 7 (v.7): El estudiante establece relaciones entre las distintas representaciones de una función	El estudiante	1. Establece relaciones entre las distintas representaciones de una función	Dada una representación de una función (descripción verbal, tabla de valores, gráfica, fórmula), el estudiante será capaz de traducirla a otra representación
		2. No establece relaciones entre las distintas representaciones de una función	
Variable 8 (v.8): El estudiante clasifica una función dada como inyectiva, sobreyectiva o biyectiva	El estudiante	1. Clasifica una función dada como inyectiva, sobreyectiva o biyectiva	Dada una función en cualquiera de sus representaciones, el estudiante será capaz de clasificarla como inyectiva, sobreyectiva o biyectiva
		2. No clasifica una función dada como inyectiva, sobreyectiva o biyectiva	
Variable 9 (v.9): El estudiante halla la inversa de una función inyectiva	El estudiante	1. Halla la inversa de una función inyectiva	Dada la fórmula que define a una función inyectiva, el estudiante será capaz de hallar su inversa
		2. No halla la inversa de una función inyectiva	

La escala de medición de las variables es nominal. Esta escala permite clasificar las unidades de análisis con respecto a la posesión o no de una determinada característica o atributo. Por lo tanto, permite determinar si las unidades de análisis, en relación con la variable estudiada, adoptan el mismo valor o no.

2.5 CRITERIOS DE DECISIÓN PARA ACEPTAR O RECHAZAR HIPÓTESIS

Después de aplicar la prueba de entrada (Anexos 7 y 15) por primera vez, se implementaron las estrategias didácticas diseñadas, después de lo cual se aplicó la prueba de entrada por segunda vez. Para este efecto se produjo un material didáctico acerca del concepto de función (Unidad 4), el cual se constituyó en el material oficial del curso de Álgebra y Funciones de la Universidad Icesi. Dicho concepto fue abordado en seis sesiones de clase; dos por semana. El tema tratado, la fecha de ejecución, los objetivos y las estrategias didácticas empleadas en cada sesión se detallan en los Anexos 45 a 50.

2.5.1 INSTRUMENTOS UTILIZADOS PARA COLECTAR LA INFORMACIÓN

Los instrumentos que se utilizaron para recoger información sobre el avance en la apropiación del concepto de función, fueron las actividades diseñadas para las sesiones 18 a 21; el instrumento que permitió observar el nivel de apropiación del concepto de función con el que llegan los estudiantes a la Universidad, fue la prueba de entrada aplicada por primera vez (Anexo 7); y el instrumento que sirvió para medir el impacto que tuvieron las estrategias didácticas, fue la prueba de entrada aplicada por segunda vez (Anexo 7). Con estos instrumentos se pudo observar si los estudiantes habían desarrollado las siguientes nueve competencias:

- Dar significado a los símbolos propios de la notación funcional,
- determinar cuándo una regla de asignación constituye una función,
- obtener modelos a partir de una tabla de valores de una función,
- determinar cómo varían ciertas magnitudes que dependen de otras,
- leer gráficas de funciones,
- interpretar gráficas de funciones,
- establecer relaciones entre las distintas representaciones de una función,
- clasificar una función dada como inyectiva, sobreyectiva o biyectiva, y
- hallar la inversa de una función inyectiva.

Los resultados que obtuvieron los estudiantes en la prueba de entrada aplicada por primera vez y en la prueba de entrada aplicada por segunda vez, se representaron en dos matrices de datos cuantitativas; una para la prueba de entrada aplicada por primera vez (Anexo 8) y otra para la prueba de entrada aplicada por segunda vez (Anexo 9), y éstas fueron el insumo para resumir la información, mediante la construcción de tablas de frecuencia (absoluta y relativa), y diagramas (de barras y circulares), a partir de los cuales se comenzó la tarea de "descripción" de la muestra en estudio.

2.5.2 LECTURA E INTERPRETACIÓN DE LAS MATRICES DE DATOS CUANTITATIVAS

Para la lectura e interpretación de las matrices de datos cuantitativas (Anexos 8 y 9), además de los códigos utilizados para cada variable (v.i), la unidad de análisis (U.A.) y los valores de cada variable (1 y 2); es importante mencionar que cada unidad de análisis, es decir, cada estudiante fue codificado con números del 1 al 40; y que los dos valores probables de respuesta para cada variable significan: **1, el estudiante posee la competencia que la respectiva variable mide; 2, el estudiante no posee dicha competencia.**

Se midió el impacto de las estrategias utilizando tablas de frecuencia absoluta y tablas de frecuencia relativa, para cada una de las variables medidas en la prueba de entrada aplicada, tanto por primera vez como por segunda vez. Se entenderá que un valor inferior a 24 para la frecuencia absoluta del dato 1 en cada tabla, significa que el desempeño de los estudiantes en dicha variable no es satisfactorio, y si este valor es superior o igual a 24, se entenderá que el desempeño de los estudiantes en dicha variable es satisfactorio.

Lo anterior equivale a que un valor inferior al 60% para la frecuencia relativa del dato 1 en cada tabla, significó que el desempeño de los estudiantes en dicha variable no fue satisfactorio, y si este valor fue superior o igual a 60%, se entendió que el desempeño de los estudiantes en dicha variable fue satisfactorio.

3 RESULTADOS

Una vez aplicadas a los estudiantes las estrategias previstas en el diseño metodológico, se llegó a los resultados que en adelante se consignan.

3.1 VALORACIÓN DE LOS ESTUDIANTES MEDIANTE LA PRUEBA DE ENTRADA APLICADA POR PRIMERA VEZ

Al contrastar los valores obtenidos por los estudiantes para la **variable v.1: El estudiante da significado a los símbolos propios de la notación funcional**, se encontró que solo siete estudiantes de los cuarenta, tuvieron un desempeño satisfactorio, es decir, el 17.5% de los cuarenta estudiantes tuvo el desempeño mencionado (Cuadro 3, Figuras 1 y 2).

Cuadro 3. Frecuencias absoluta y relativa para la variable v.1 de la prueba de entrada aplicada por primera vez.

v.1	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
1	7	7/40=17.5%
2	33	33/40=82.5%
Total	40	40/40=100%

Figura 1. Diagrama de barras para la variable v.1 de la prueba de entrada aplicada por primera vez.

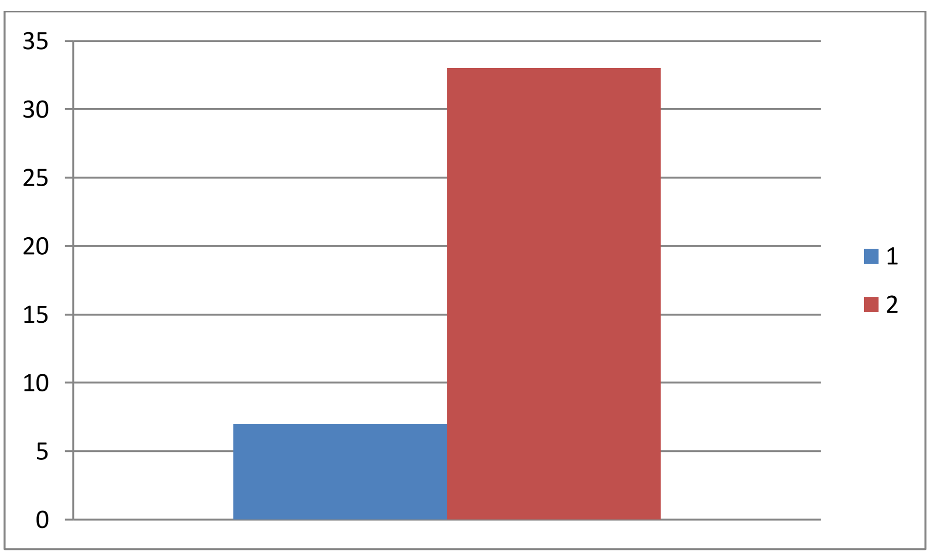
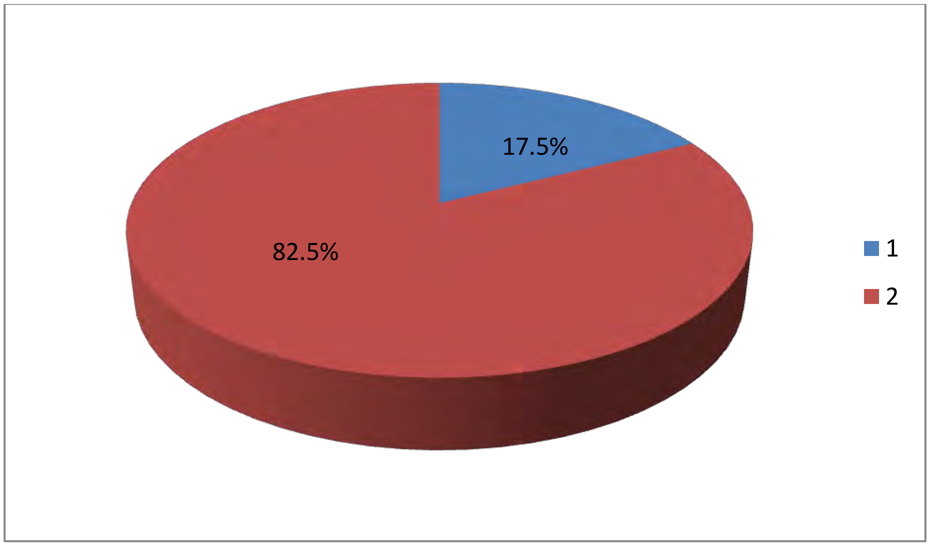


Figura 2. Diagrama circular para la variable v.1 de la prueba de entrada aplicada por primera vez.



Con relación a la **variable v.2: El estudiante determina cuando una regla de asignación es una función**, treinta y nueve estudiantes de cuarenta evidenciaron un desempeño no satisfactorio. Esto equivale a que el 97.5% de los cuarenta estudiantes tuvo dicho desempeño (Cuadro 4, Figuras 3 y 4).

Cuadro 4. Frecuencias absoluta y relativa para la variable v.2 de la prueba de entrada aplicada por primera vez.

v.2	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
1	1	1/40=2.5%
2	39	39/40=97.5%
Total	40	40/40=100%

Figura 3. Diagrama de barras para la variable v.2 de la prueba de entrada aplicada por primera vez.

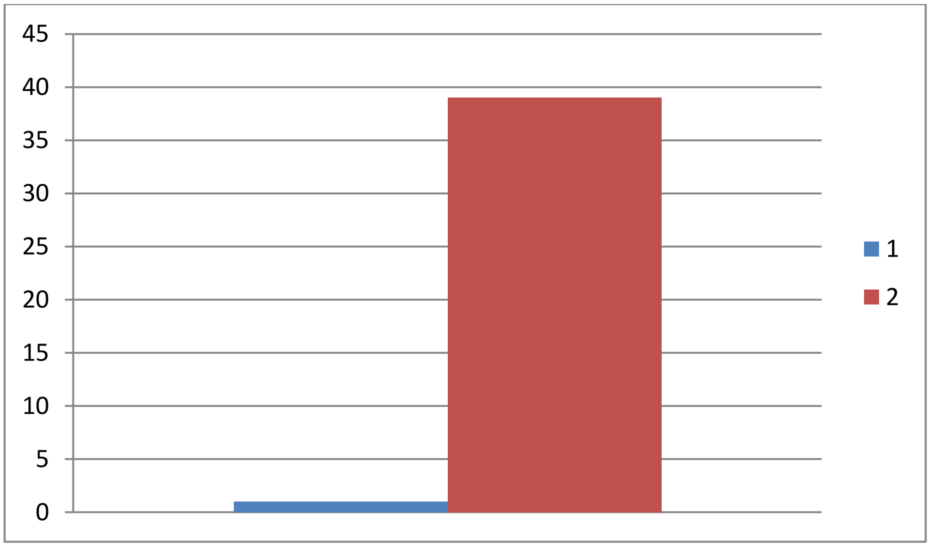
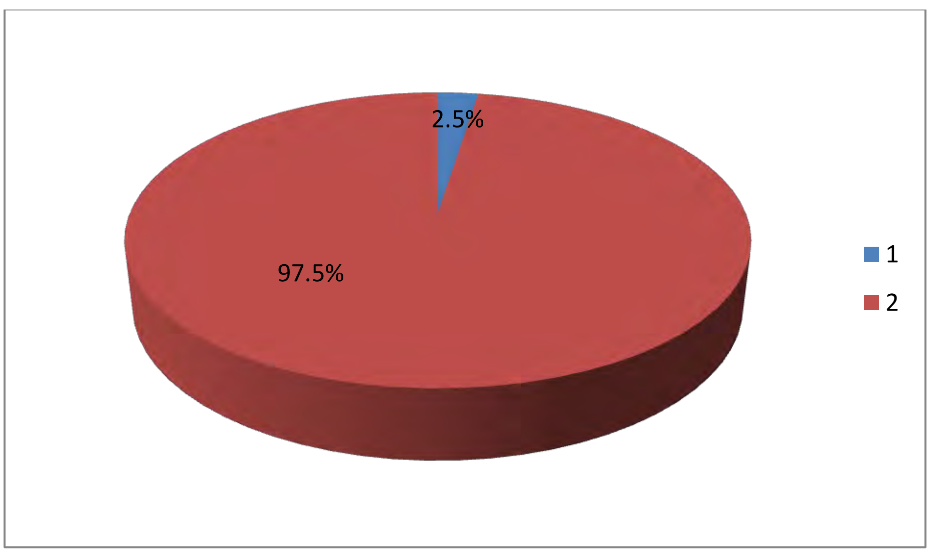


Figura 4. Diagrama circular para la variable v.2 de la prueba de entrada aplicada por primera vez.



La **variable v.3: El estudiante obtiene modelos a partir de una tabla de valores de una función**, mostró un desempeño insatisfactorio del grupo de cuarenta estudiantes, en el que solo uno se desempeñó satisfactoriamente; lo cual significa que únicamente el 2.5% de los cuarenta estudiantes tuvo un desempeño satisfactorio (Cuadro 5, Figuras 5 y 6).

Cuadro 5. Frecuencias absoluta y relativa para la variable v.3 de la prueba de entrada aplicada por primera vez.

v.3	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
1	1	1/40=2.5%
2	39	39/40=97.5%
Total	40	40/40=100%

Figura 5. Diagrama de barras para la variable v.3 de la prueba de entrada aplicada por primera vez.

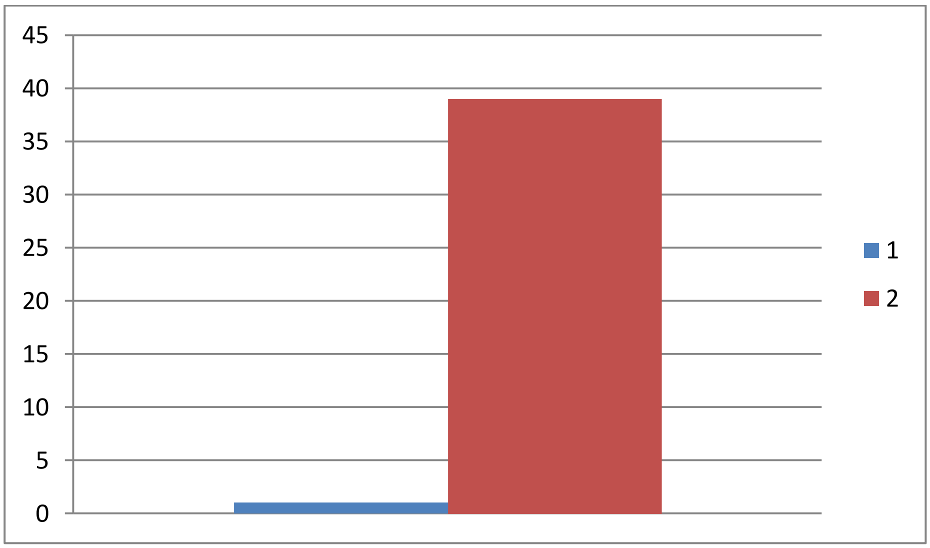
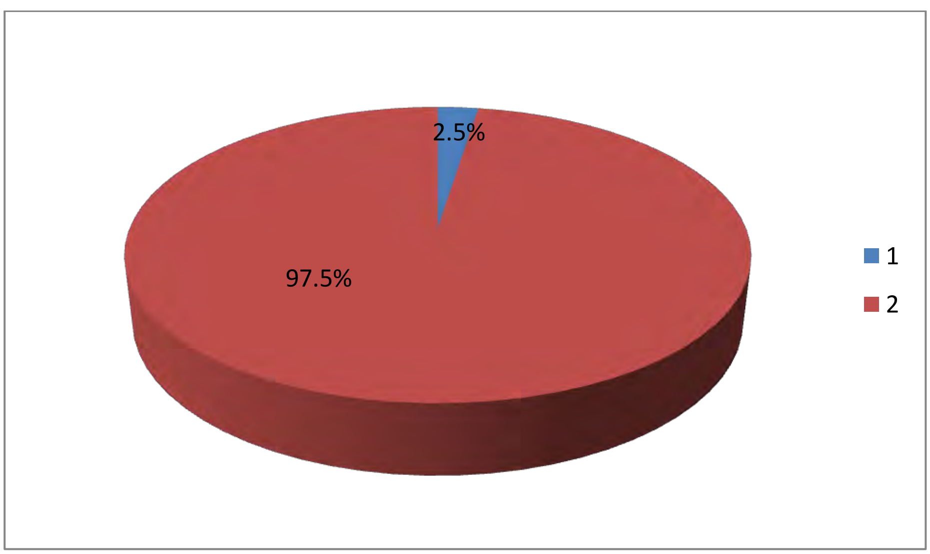


Figura 6. Diagrama circular para la variable v.3 de la prueba de entrada aplicada por primera vez.



Al contrastar los valores obtenidos por los estudiantes para la **variable v.4: El estudiante determina cómo varían ciertas magnitudes que dependen de otras**, se encontró que solo tres estudiantes de los cuarenta, tuvieron un desempeño satisfactorio, es decir, el 7.5% de los cuarenta estudiantes presentó el desempeño mencionado (Cuadro 6, Figuras 7 y 8).

Cuadro 6. Frecuencias absoluta y relativa para la variable v.4 de la prueba de entrada aplicada por primera vez.

v.4	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
1	3	3/40=7.5%
2	37	37/40=92.5%
Total	40	40/40=100%

Figura 7. Diagrama de barras para la variable v.4 de la prueba de entrada aplicada por primera vez.

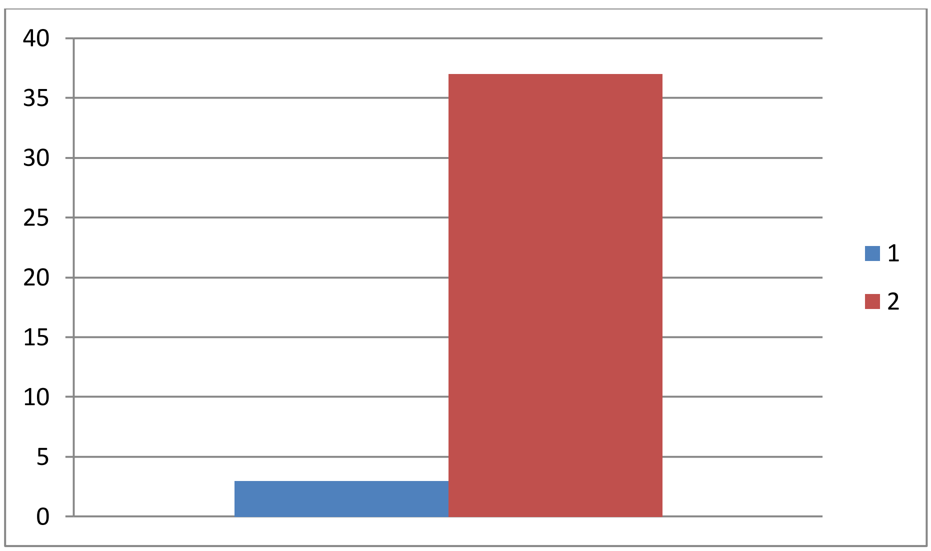
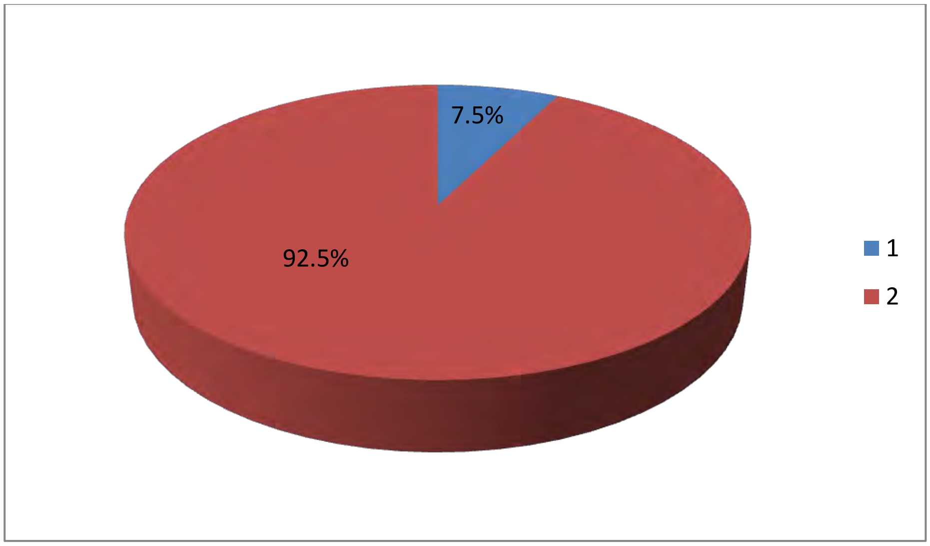


Figura 8. Diagrama circular para la variable v.4 de la prueba de entrada aplicada por primera vez.



Con relación a la **variable v.5: El estudiante lee gráficas de funciones**, veintiocho estudiantes de cuarenta evidenciaron un desempeño no satisfactorio. Esto equivale a que el 70% de los cuarenta estudiantes tuvo dicho desempeño (Cuadro 7, Figuras 9 y 10).

Cuadro 7. Frecuencias absoluta y relativa para la variable v.5 de la prueba de entrada aplicada por primera vez.

v.5	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
1	12	12/40=30%
2	28	28/40=70%
Total	40	40/40=100%

Figura 9. Diagrama de barras para la variable v.5 de la prueba de entrada aplicada por primera vez.

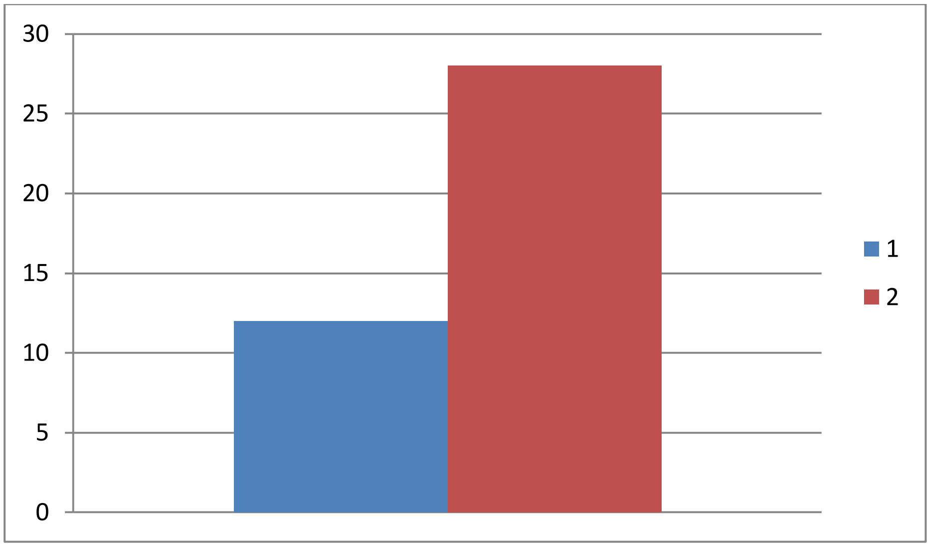
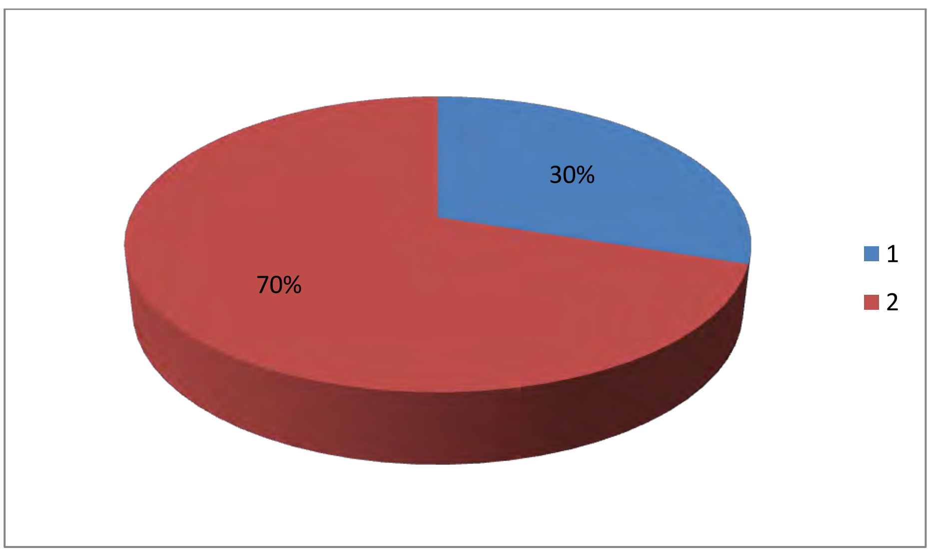


Figura 10. Diagrama circular para la variable v.5 de la prueba de entrada aplicada por primera vez.



La **variable v.6: El estudiante interpreta gráficas de funciones**, mostró un desempeño insatisfactorio del grupo de cuarenta estudiantes, en el que solo cuatro se desempeñaron satisfactoriamente; lo cual significa que únicamente el 10% de los cuarenta estudiantes tuvo un desempeño satisfactorio (Cuadro 8, Figuras 11 y 12).

Cuadro 8. Frecuencias absoluta y relativa para la variable v.6 de la prueba de entrada aplicada por primera vez.

v.6	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
1	4	4/40=10%
2	36	36/40=90%
Total	40	40/40=100%

Figura 11. Diagrama de barras para la variable v.6 de la prueba de entrada aplicada por primera vez.

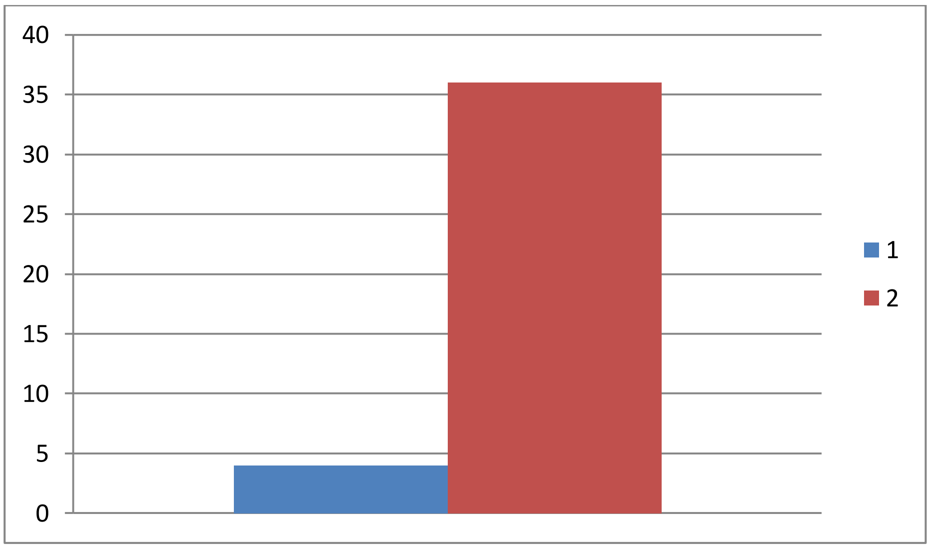
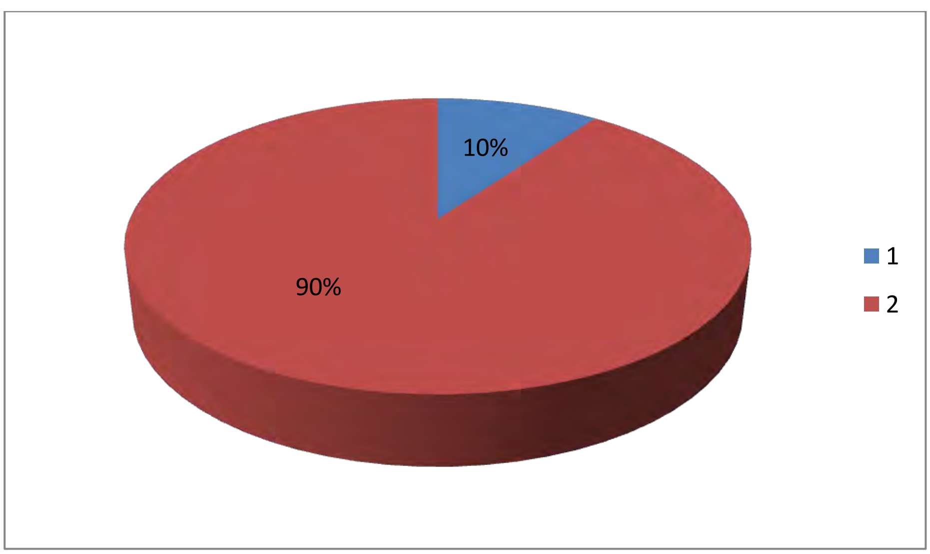


Figura 12. Diagrama circular para la variable v.6 de la prueba de entrada aplicada por primera vez.



Al contrastar los valores obtenidos por los estudiantes para la **variable v.7: El estudiante establece relaciones entre las distintas representaciones de una función**, se encontró que solo nueve estudiantes de los cuarenta, tuvieron un desempeño satisfactorio, es decir, el 22.5% de los cuarenta estudiantes presentó el desempeño mencionado (Cuadro 9, Figuras 13 y 14).

Cuadro 9. Frecuencias absoluta y relativa para la variable v.7 de la prueba de entrada aplicada por primera vez.

v.7	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
1	9	9/40=22.5%
2	31	31/40=77.5%
Total	40	40/40=100%

Figura 13. Diagrama de barras para la variable v.7 de la prueba de entrada aplicada por primera vez.

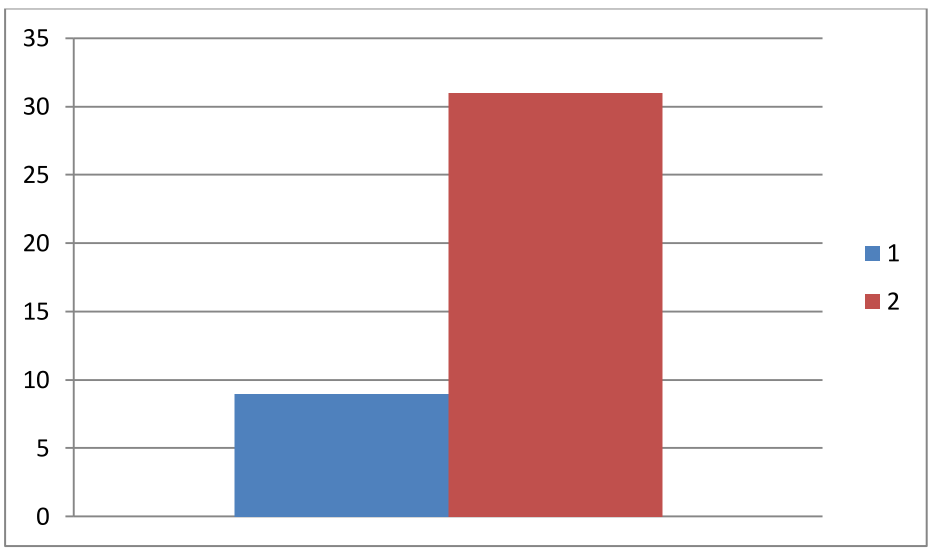
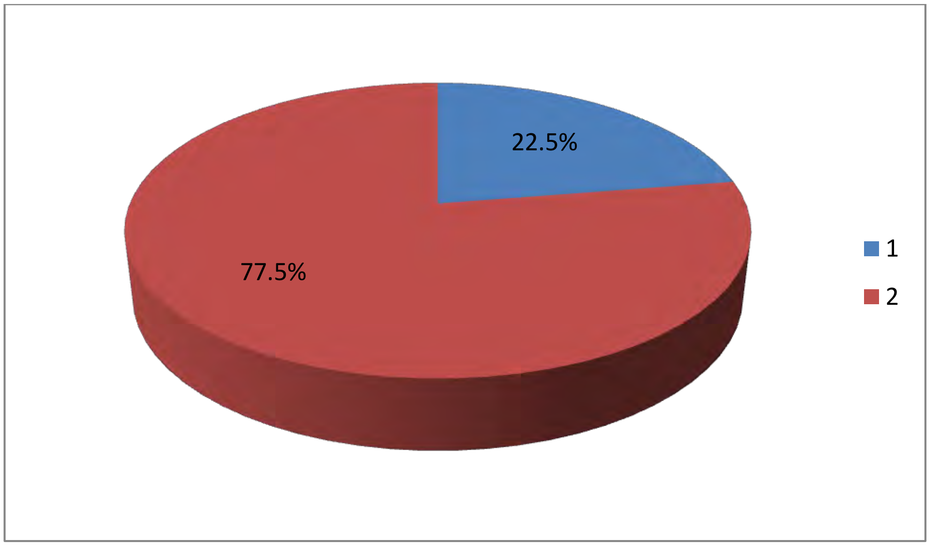


Figura 14. Diagrama circular para la variable v.7 de la prueba de entrada aplicada por primera vez.



Con relación a la **variable v.8: El estudiante clasifica una función dada como inyectiva, sobreyectiva o biyectiva**, treinta y nueve estudiantes de cuarenta evidenciaron un desempeño no satisfactorio. Esto equivale a que el 97.5% tuvo dicho desempeño (Cuadro 10, Figuras 15 y 16).

Cuadro 10. Frecuencias absoluta y relativa para la variable v.8 de la prueba de entrada aplicada por primera vez.

v.8	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
1	1	1/40=2.5%
2	39	39/40=97.5%
Total	40	40/40=100%

Figura 15. Diagrama de barras para la variable v.8 de la prueba de entrada aplicada por primera vez.

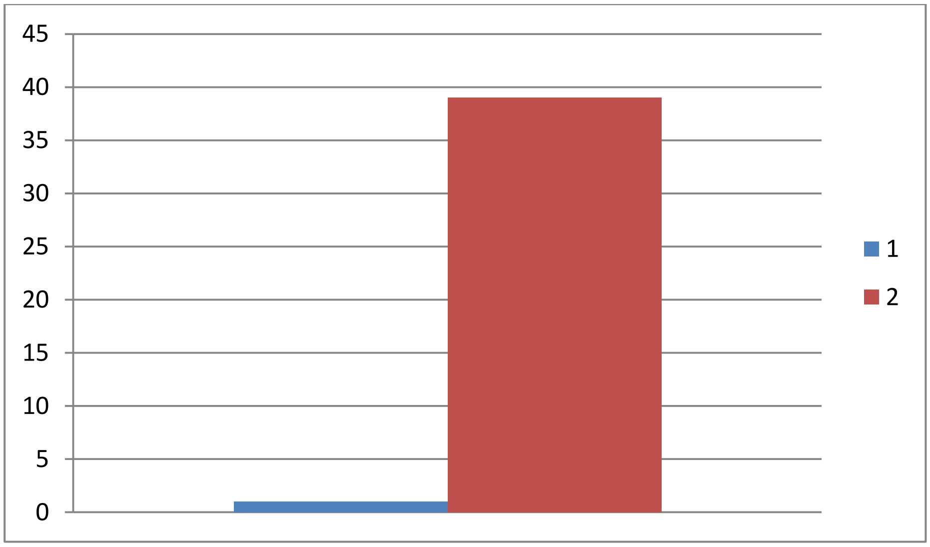
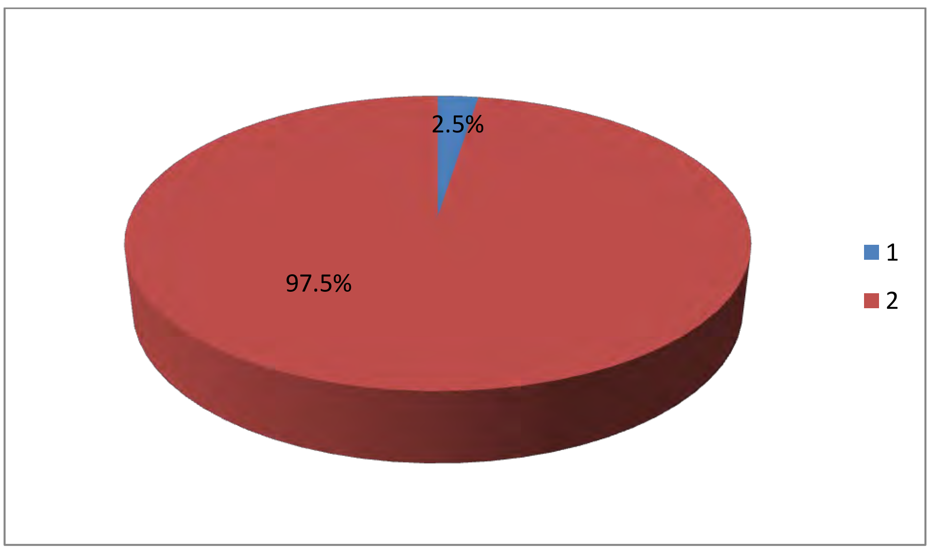


Figura 16. Diagrama circular para la variable v.8 de la prueba de entrada aplicada por primera vez.



La **variable v.9: El estudiante halla la inversa de una función inyectiva**, mostró un desempeño insatisfactorio del grupo de cuarenta estudiantes, en el que ninguno se desempeñó satisfactoriamente; lo cual significa que el 100% de los cuarenta estudiantes tuvo un desempeño insatisfactorio (Cuadro 11).

Cuadro 11. Frecuencias absoluta y relativa para la variable v.9 de la prueba de entrada aplicada por primera vez.

v.9	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
1	0	0/40=0%
2	40	40/40=100%
Total	40	40/40=100%

De las tablas y gráficas anteriores se infiere que el resultado más deficiente en la prueba de entrada aplicada por primera vez, se presentó en la **variable v.9: El estudiante halla la inversa de una función inyectiva**, que tomó 40 veces el valor 2 (No halla la inversa de una función inyectiva); y el resultado menos deficiente se presentó en la **variable v.5: El estudiante lee gráficas de funciones**, que tomó 28 veces el valor 2 (No lee gráficas de funciones).

De esta valoración se deduce que el desempeño de los estudiantes con respecto a todas las variables, en general, fue insatisfactorio, antes de ser sometidos a las estrategias tendientes al mejoramiento de la comprensión del concepto de función. De lo cual se concluye que los estudiantes llegaron al curso con unas competencias muy pobres en cuanto a la comprensión del concepto mencionado.

3.2 VALORACIÓN DE LOS ESTUDIANTES MEDIANTE LA PRUEBA DE ENTRADA APLICADA POR SEGUNDA VEZ

Al contrastar los valores obtenidos por los estudiantes para la **variable v.1: El estudiante da significado a los símbolos propios de la notación funcional**, se encontró que treinta y ocho estudiantes de los cuarenta, tuvieron un desempeño satisfactorio, es decir, el 95% de los cuarenta estudiantes tuvo el desempeño mencionado (Cuadro 12, Figuras 17 y 18).

Cuadro 12. Frecuencias absoluta y relativa para la variable v.1 de la prueba de entrada aplicada por segunda vez.

v.1	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
1	38	38/40=95%
2	2	2/40=5%
Total	40	40/40=100%

Figura 17. Diagrama de barras para la variable v.1 de la prueba de entrada aplicada por segunda vez.

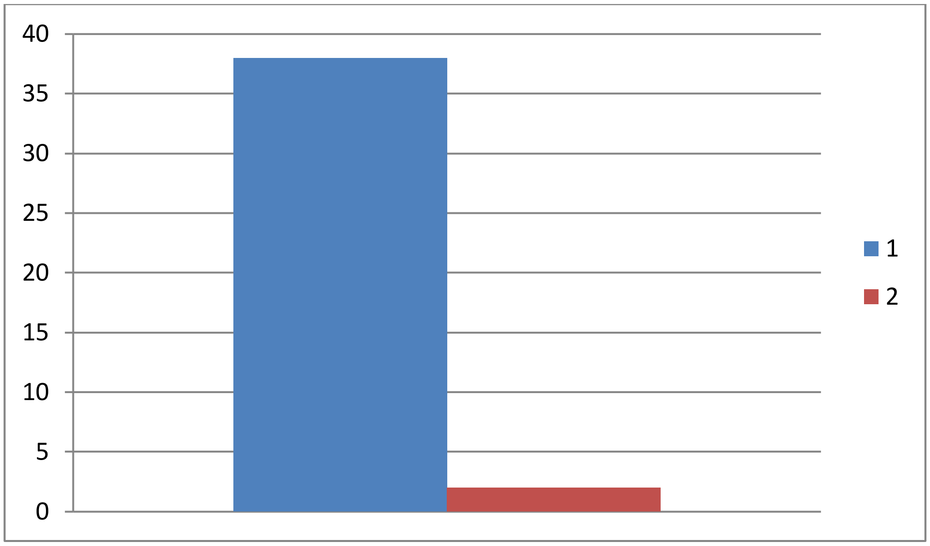
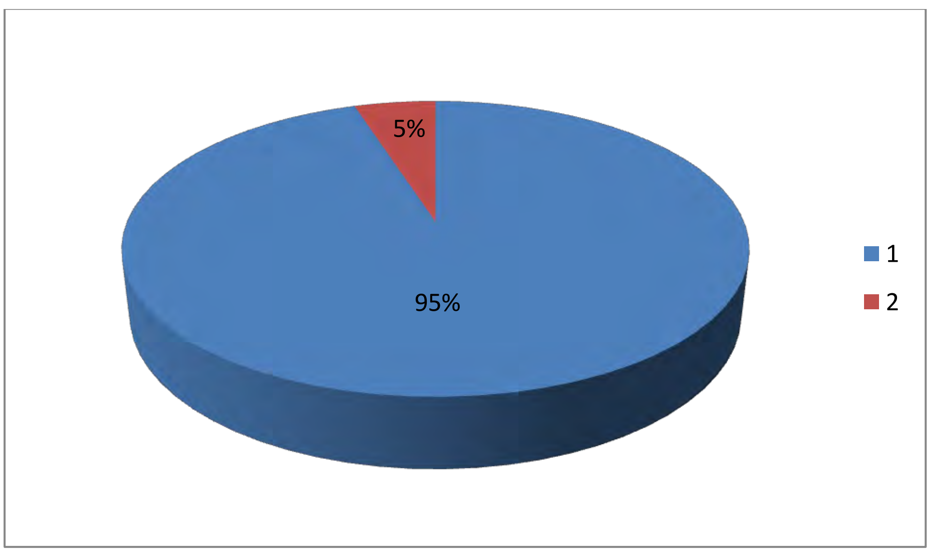


Figura 18. Diagrama circular para la variable v.1 de la prueba de entrada aplicada por segunda vez.



Con relación a la **variable v.2: El estudiante determina cuando una regla de asignación es una función**, los cuarenta estudiantes evidenciaron un desempeño satisfactorio. Esto equivale a que el 100% de los cuarenta estudiantes tuvo dicho desempeño (Cuadro 13).

Cuadro 13. Frecuencias absoluta y relativa para la variable v.2 de la prueba de entrada aplicada por segunda vez.

v.2	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
1	40	40/40=100%
2	0	0/40=0%
Total	40	40/40=100%

La **variable v.3: El estudiante obtiene modelos a partir de una tabla de valores de una función**, mostró un desempeño satisfactorio del grupo de cuarenta estudiantes, en el que solo tres se desempeñaron insatisfactoriamente; lo cual significa que únicamente el 7.5% de los cuarenta estudiantes tuvo un desempeño insatisfactorio (Cuadro 14, Figuras 19 y 20).

Cuadro 14. Frecuencias absoluta y relativa para la variable v.3 de la prueba de entrada aplicada por segunda vez.

v.3	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
1	37	37/40=92.5%
2	3	3/40=7.5%
Total	40	40/40=100%

Figura 19. Diagrama de barras para la variable v.3 de la prueba de entrada aplicada por segunda vez.

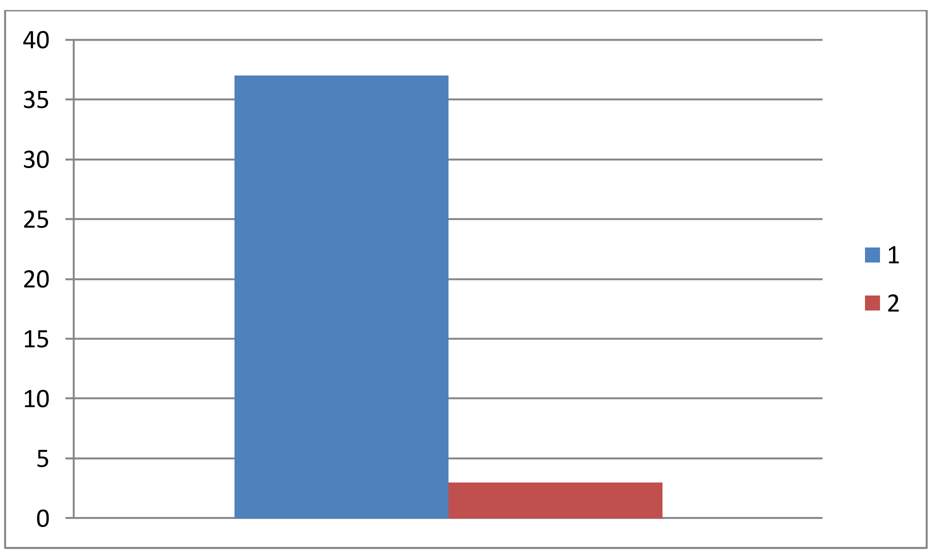
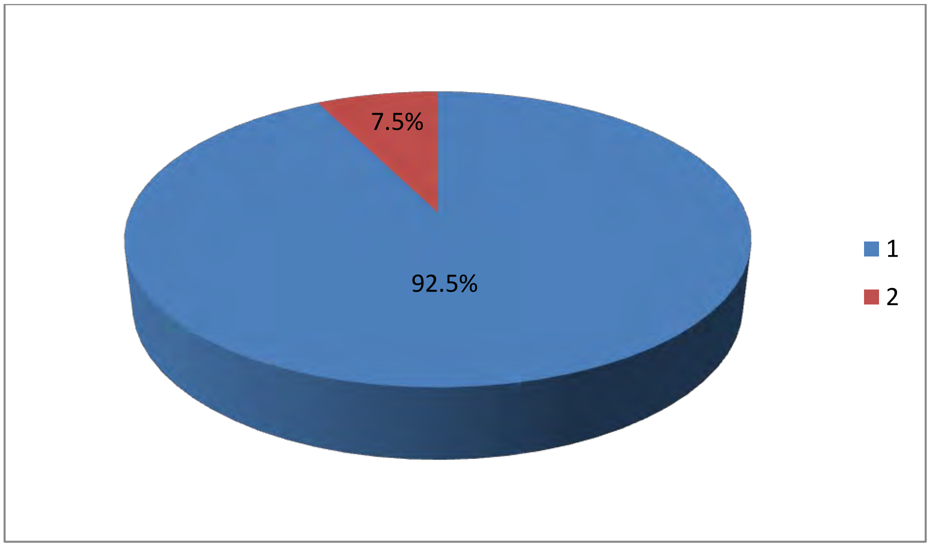


Figura 20. Diagrama circular para la variable v.3 de la prueba de entrada aplicada por segunda vez.



Al contrastar los valores obtenidos por los estudiantes para la **variable v.4: El estudiante determina cómo varían ciertas magnitudes que dependen de otras**, se encontró que treinta y siete estudiantes de los cuarenta, tuvieron un desempeño satisfactorio, es decir, el 92.5% de los cuarenta estudiantes presentó el desempeño mencionado (Cuadro 15, Figuras 21 y 22).

Cuadro 15. Frecuencias absoluta y relativa para la variable v.4 de la prueba de entrada aplicada por segunda vez.

v.4	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
1	37	37/40=92.5%
2	3	3/40=7.5%
Total	40	40/40=100%

Figura 21. Diagrama de barras para la variable v.4 de la prueba de entrada aplicada por segunda vez.

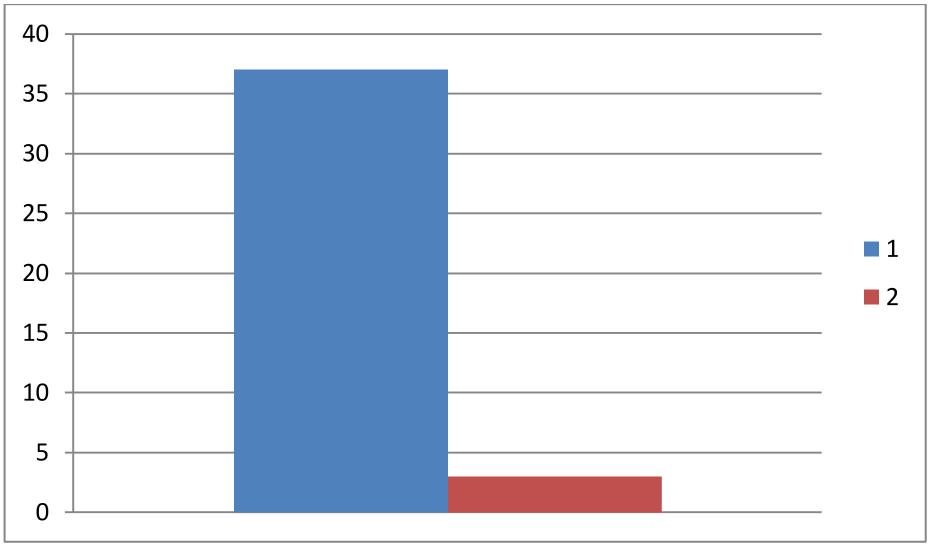
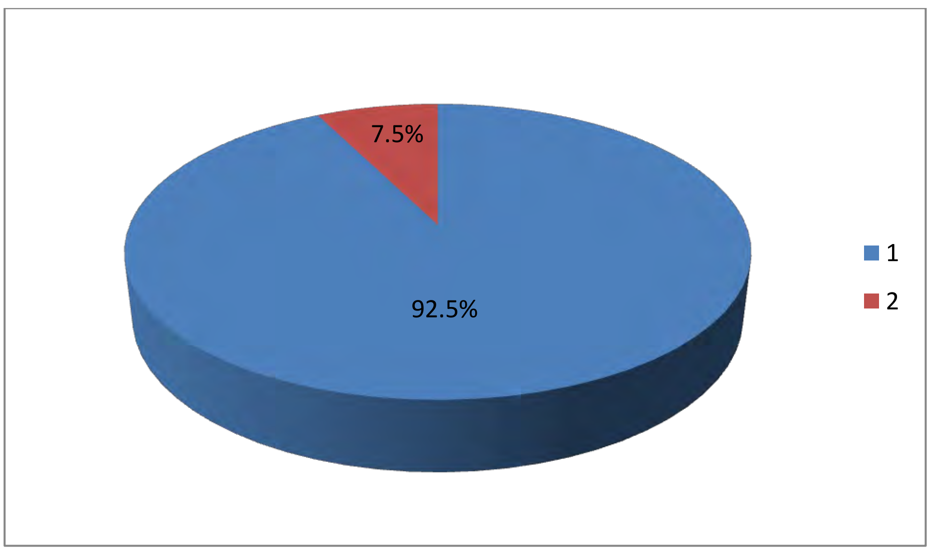


Figura 22. Diagrama circular para la variable v.4 de la prueba de entrada aplicada por segunda vez.



Con relación a la **variable v.5: El estudiante lee gráficas de funciones**, treinta y dos estudiantes de cuarenta evidenciaron un desempeño satisfactorio. Esto equivale a que el 80% de los cuarenta estudiantes tuvo dicho desempeño (Cuadro 16, Figuras 23 y 24).

Cuadro 16. Frecuencias absoluta y relativa para la variable v.5 de la prueba de entrada aplicada por segunda vez.

v.5	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
1	32	32/40=80%
2	8	8/40=20%
Total	40	40/40=100%

Figura 23. Diagrama de barras para la variable v.5 de la prueba de entrada aplicada por segunda vez.

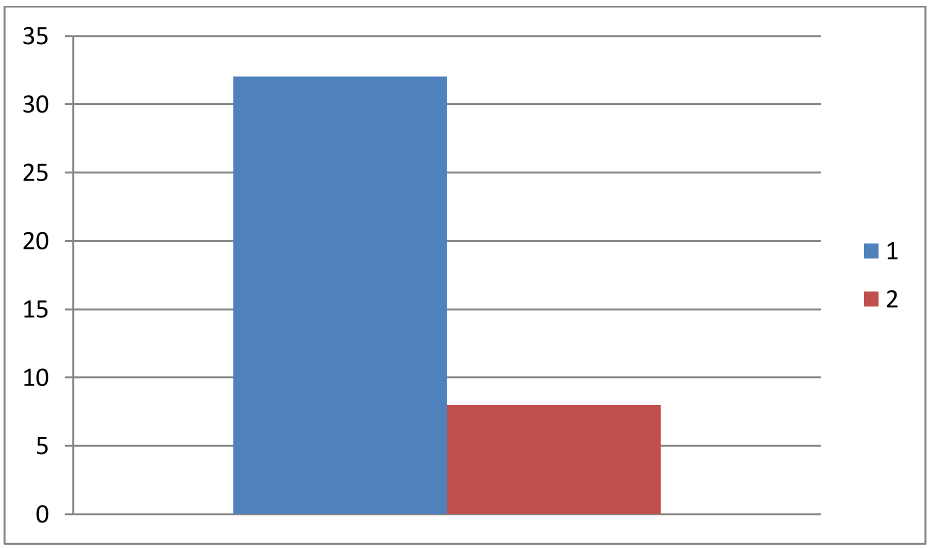
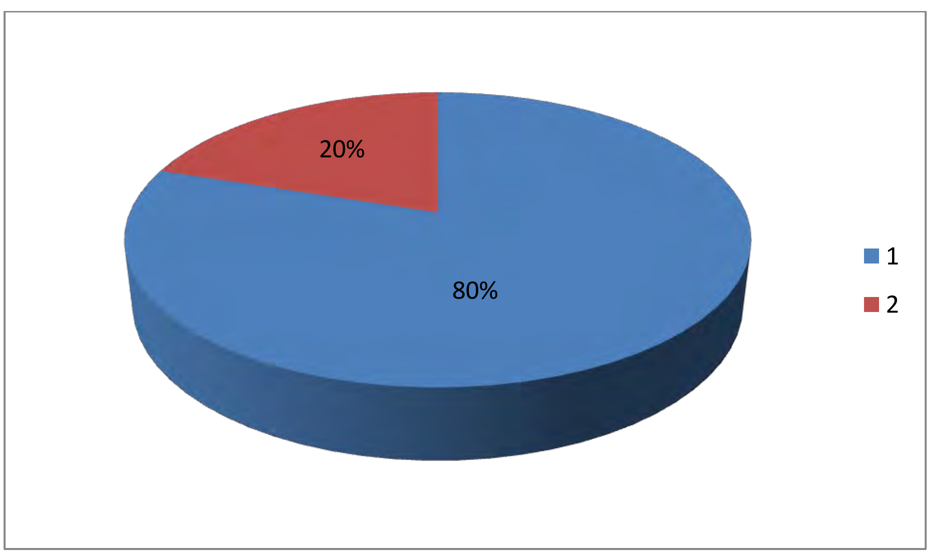


Figura 24. Diagrama circular para la variable v.5 de la prueba de entrada aplicada por segunda vez.



La **variable v.6: El estudiante interpreta gráficas de funciones**, mostró un desempeño satisfactorio del grupo de cuarenta estudiantes, en el que solo cinco se desempeñaron insatisfactoriamente; lo cual significa que únicamente el 12.5% de los cuarenta estudiantes tuvo un desempeño insatisfactorio (Cuadro 17, Figuras 25 y 26).

Cuadro 17. Frecuencias absoluta y relativa para la variable v.6 de la prueba de entrada aplicada por segunda vez.

v.6	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
1	35	35/40=87.5%
2	5	5/40=12.5%
Total	40	40/40=100%

Figura 25. Diagrama de barras para la variable v.6 de la prueba de entrada aplicada por segunda vez.

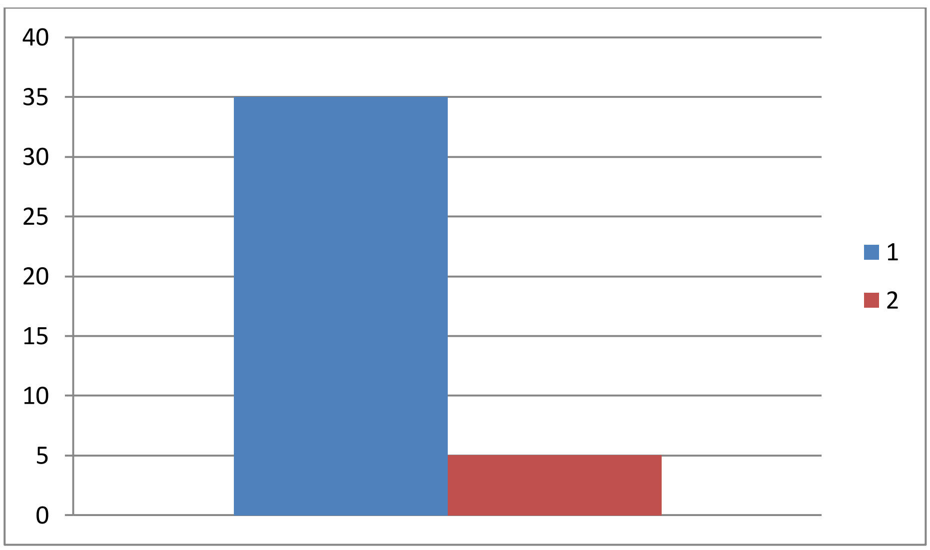
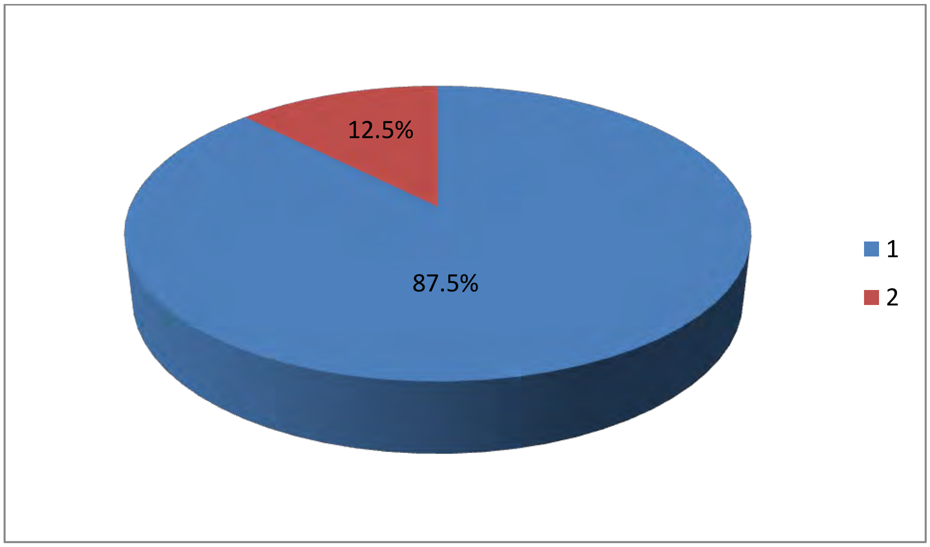


Figura 26. Diagrama circular para la variable v.6 de la prueba de entrada aplicada por segunda vez.



Al contrastar los valores obtenidos por los estudiantes para la **variable v.7: El estudiante establece relaciones entre las distintas representaciones de una función**, se encontró que treinta y ocho estudiantes de los cuarenta, tuvieron un desempeño satisfactorio, es decir, el 95% de los cuarenta estudiantes presentó el desempeño mencionado (Cuadro 18, Figuras 27 y 28).

Cuadro 18. Frecuencias absoluta y relativa para la variable v.7 de la prueba de entrada aplicada por segunda vez.

v.7	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
1	38	38/40=95%
2	2	2/40=5%
Total	40	40/40=100%

Figura 27. Diagrama de barras para la variable v.7 de la prueba de entrada aplicada por segunda vez.

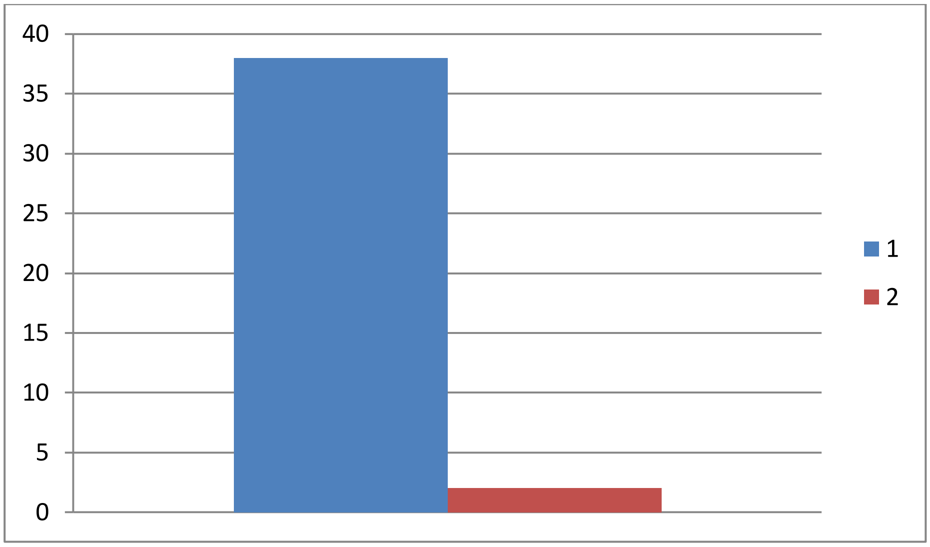
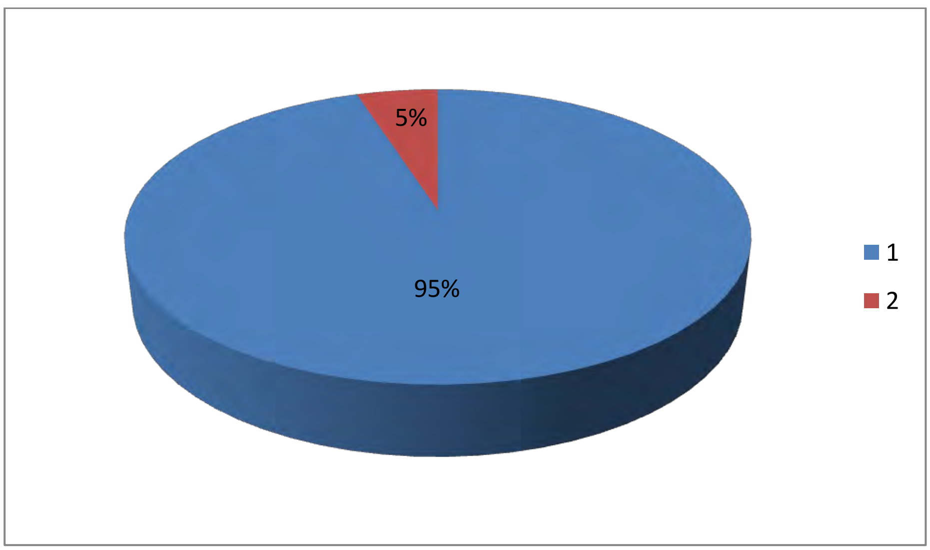


Figura 28. Diagrama circular para la variable v.7 de la prueba de entrada aplicada por segunda vez.



Con relación a la **variable v.8: El estudiante clasifica una función dada como inyectiva, sobreyectiva o biyectiva**, veintisiete estudiantes de cuarenta evidenciaron un desempeño satisfactorio. Esto equivale a que el 67.5% de los cuarenta estudiantes tuvo dicho desempeño (Cuadro 19, Figuras 29 y 30).

Cuadro 19. Frecuencias absoluta y relativa para la variable v.8 de la prueba de entrada aplicada por segunda vez.

v.8	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
1	27	27/40=67.5%
2	13	13/40=32.5%
Total	40	40/40=100%

Figura 29. Diagrama de barras para la variable v.8 de la prueba de entrada aplicada por segunda vez.

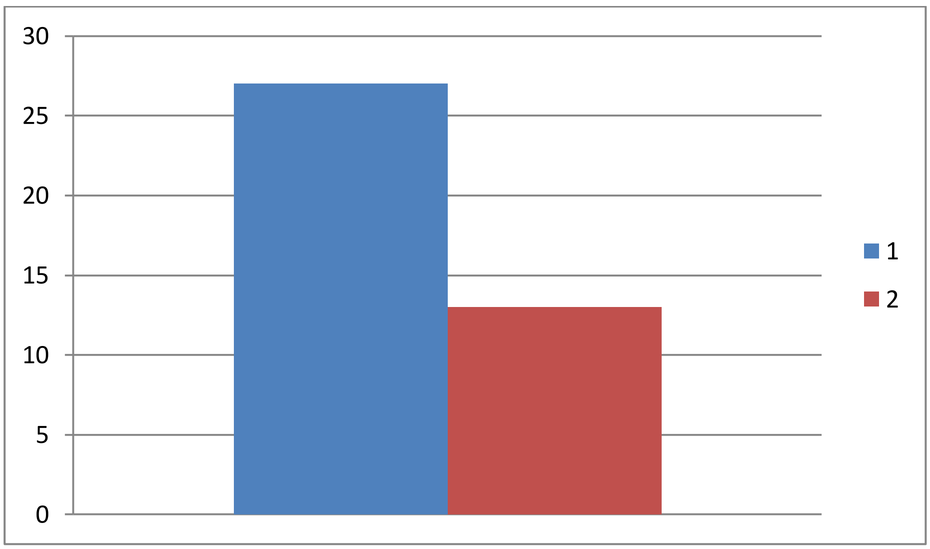
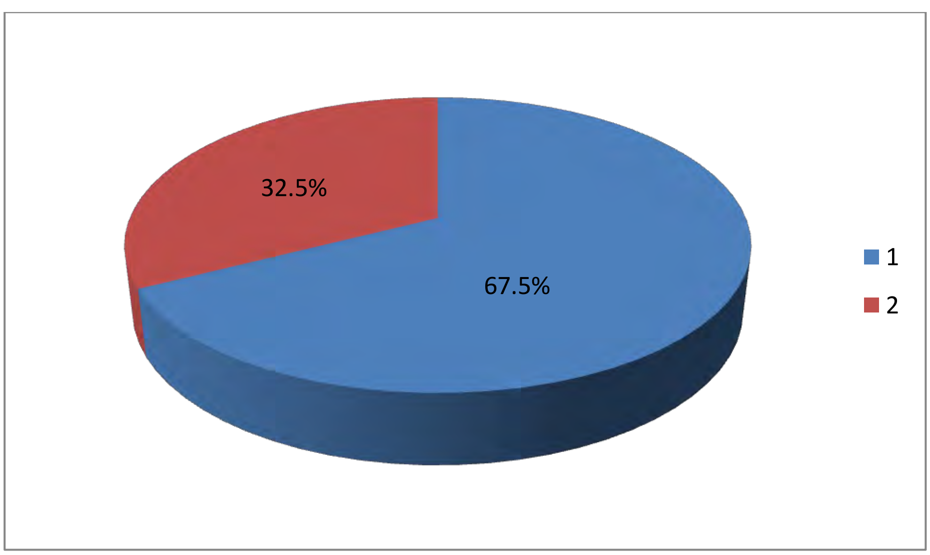


Figura 30. Diagrama circular para la variable v.8 de la prueba de entrada aplicada por segunda vez.



La **variable v.9: El estudiante halla la inversa de una función inyectiva**, mostró un desempeño satisfactorio del grupo de cuarenta estudiantes, en el que doce se desempeñaron insatisfactoriamente; lo cual significa que el 30% de los cuarenta estudiantes tuvo un desempeño insatisfactorio (Cuadro 20, Figuras 31 y 32).

Cuadro 20. Frecuencias absoluta y relativa para la variable v.9 de la prueba de entrada aplicada por segunda vez.

v.9	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
1	28	28/40=70%
2	12	12/40=30%
Total	40	40/40=100%

Figura 31. Diagrama de barras para la variable v.9 de la prueba de entrada aplicada por segunda vez.

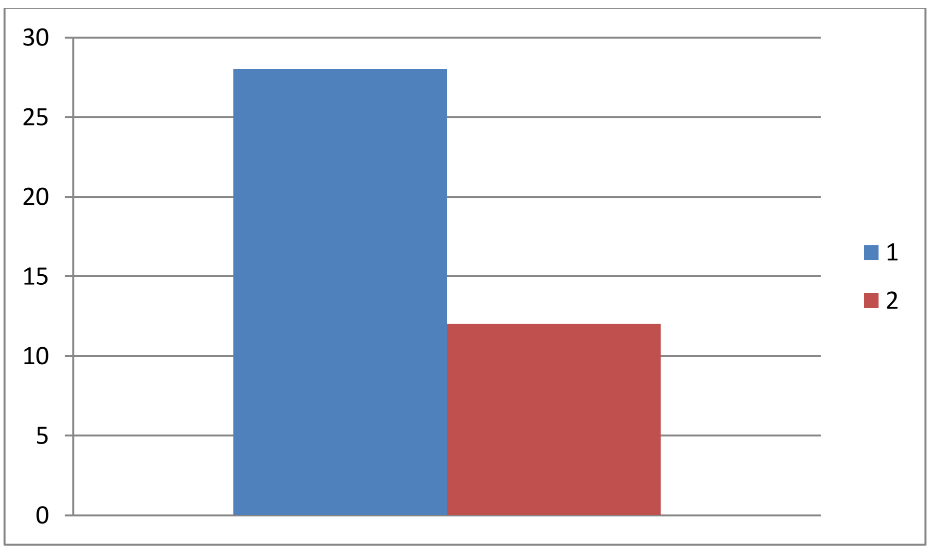
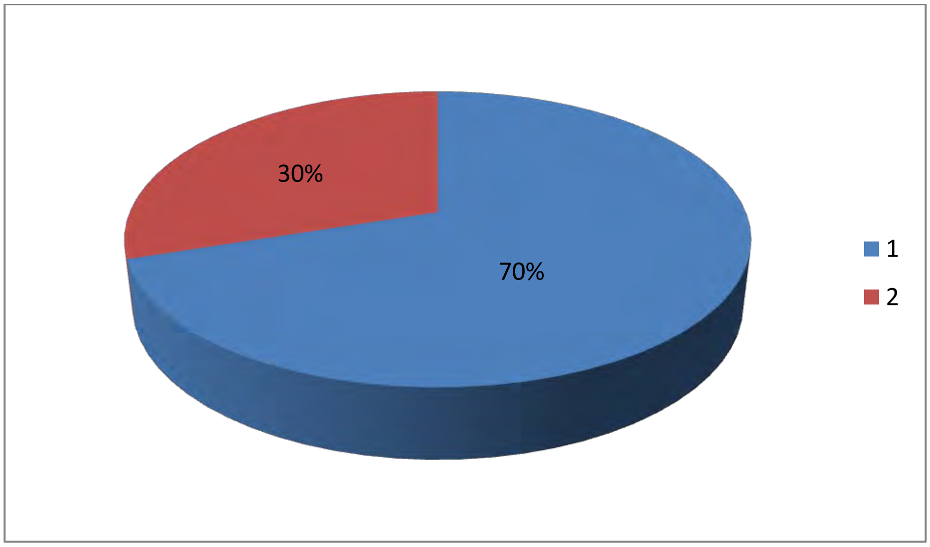


Figura 32. Diagrama circular para la variable v.9 de la prueba de entrada aplicada por segunda vez.



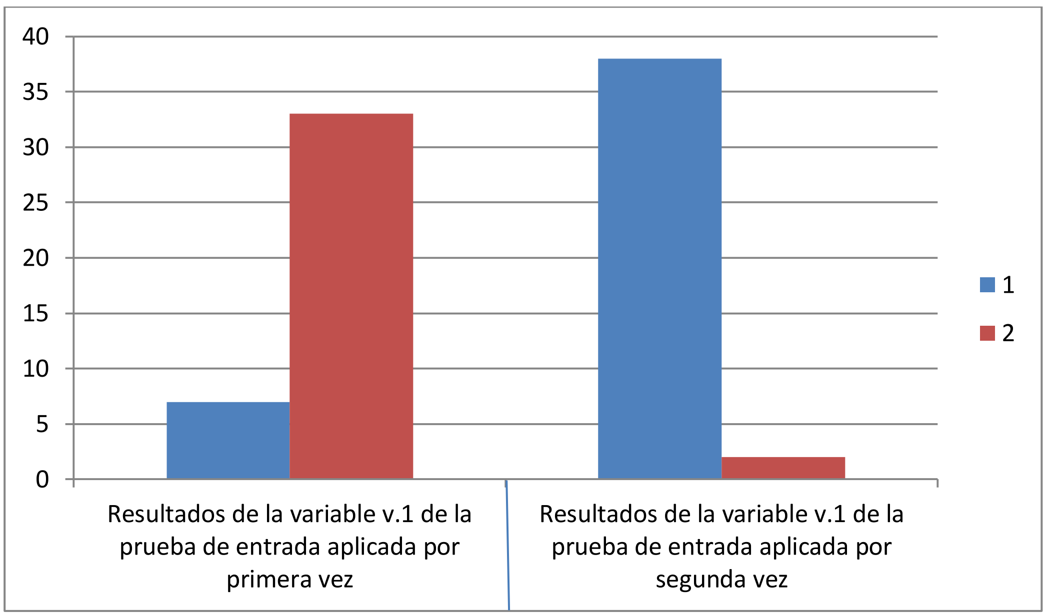
Al compendiar la información de los Cuadros y Figuras anteriores se infiere que el resultado más deficiente en la prueba de entrada aplicada por segunda vez, se presentó en la **variable v.8: El estudiante clasifica una función dada como inyectiva, sobreyectiva o biyectiva**, que tomó 13 veces el valor 2 (No clasifica una función dada como inyectiva, sobreyectiva o biyectiva); y el resultado menos deficiente se presentó en la **variable v.2: El estudiante determina cuando una regla de asignación es una función**, que nunca tomó el valor 2 (No determina cuando una regla de asignación es una función).

De esta valoración se deduce que el desempeño de los estudiantes con respecto a todas las variables, en general, fue satisfactorio, después de haberles aplicado las estrategias tendientes al mejoramiento de la comprensión del concepto de función. De lo cual se concluye que el mejoramiento alcanzado en la comprensión del concepto mencionado, fue el efecto directo de la aplicación de las citadas estrategias.

3.3 COMPARACIÓN DE LA RESPUESTA DE LOS ESTUDIANTES A LA PRUEBA DE ENTRADA, ANTES Y DESPUÉS DE LA APLICACIÓN DE LAS ESTRATEGIAS

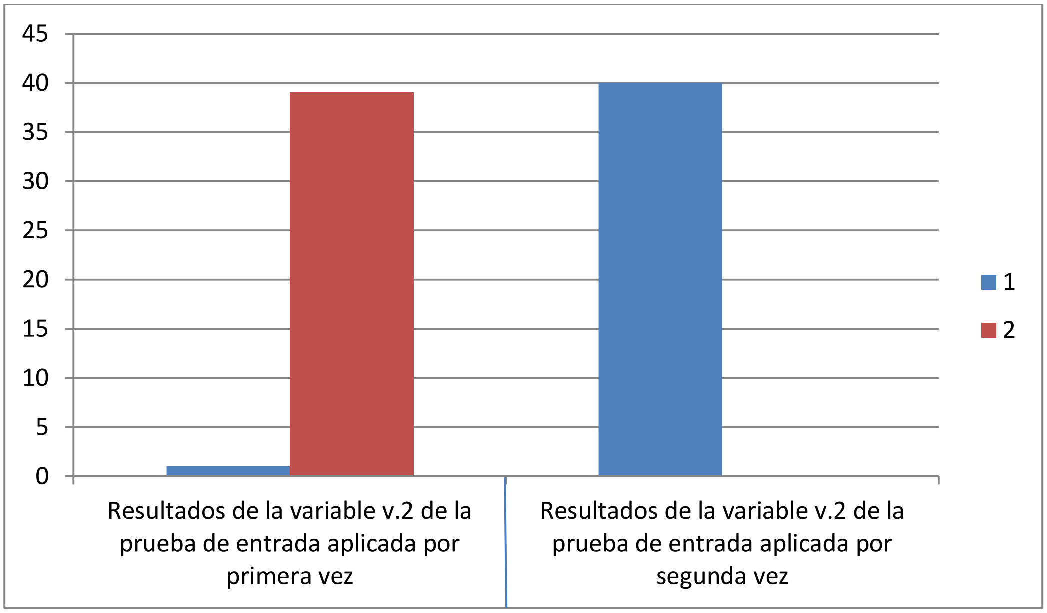
La **variable v.1: El estudiante da significado a los símbolos propios de la notación funcional**, pasó de tomar siete veces el valor 1 (Da significado a los símbolos propios de la notación funcional) en la prueba de entrada aplicada por primera vez, a tomar treinta y ocho veces dicho valor en la prueba de entrada aplicada por segunda vez (Figura 33).

Figura 33. Diagrama de barras comparativo de los resultados de la variable v.1 de la prueba de entrada aplicada por primera y segunda vez.



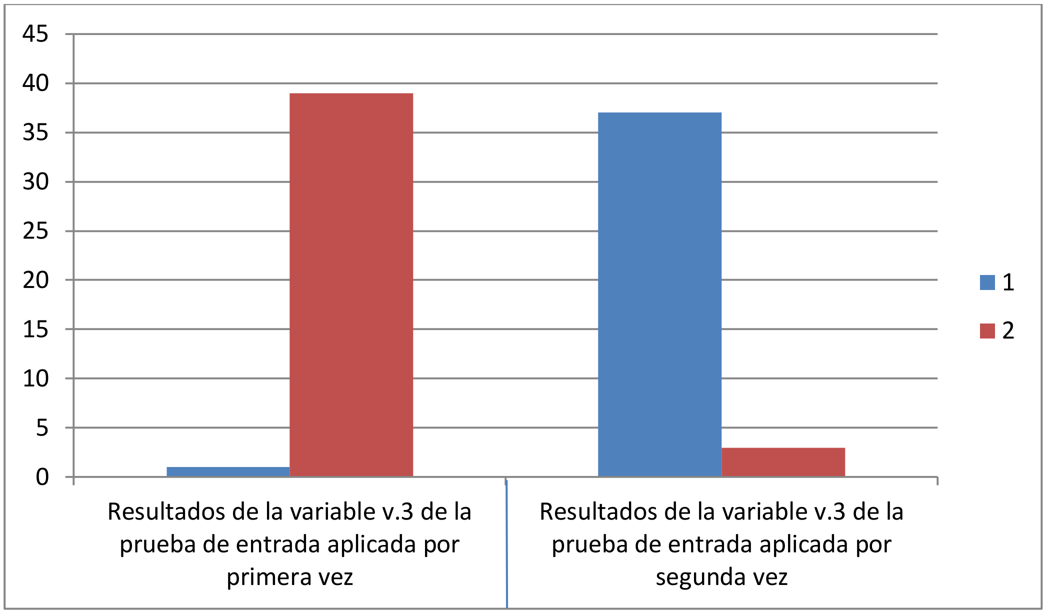
La **variable v.2: El estudiante determina cuando una regla de asignación es una función**, pasó de tomar una vez el valor 1 (Determina cuando una regla de asignación es una función) en la prueba de entrada aplicada por primera vez, a tomar cuarenta veces dicho valor en la prueba de entrada aplicada por segunda vez (Figura 34).

Figura 34. Diagrama de barras comparativo de los resultados de la variable v.2 de la prueba de entrada aplicada por primera y segunda vez.



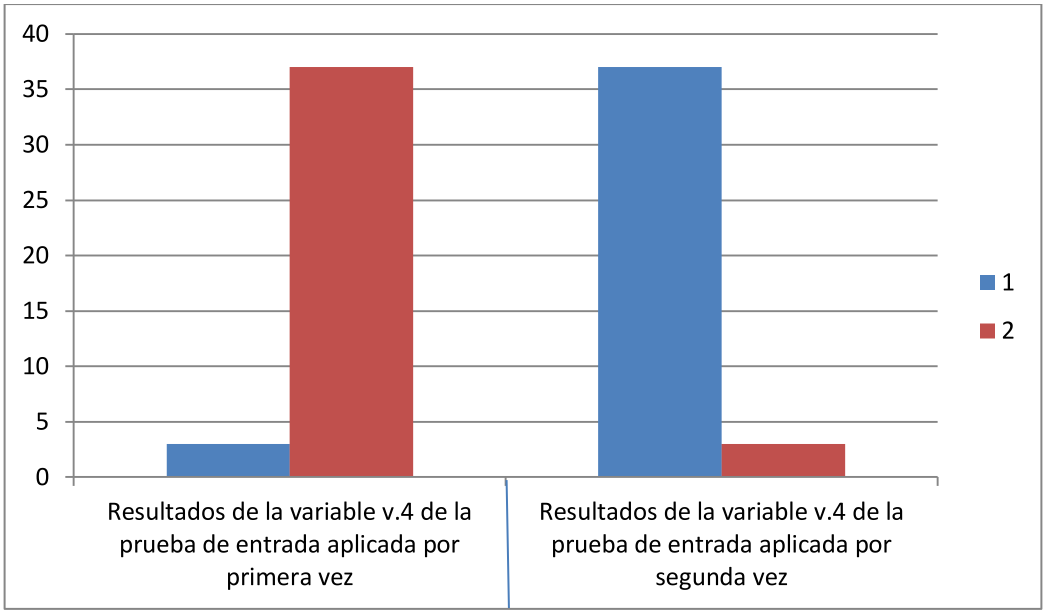
La **variable v.3: El estudiante obtiene modelos a partir de una tabla de valores de una función**, pasó de tomar una vez el valor 1 (Obtiene modelos a partir de una tabla de valores de una función) en la prueba de entrada aplicada por primera vez, a tomar treinta y ocho veces dicho valor en la prueba de entrada aplicada por segunda vez (Figura 35).

Figura 35. Diagrama de barras comparativo de los resultados de la variable v.3 de la prueba de entrada aplicada por primera y segunda vez.



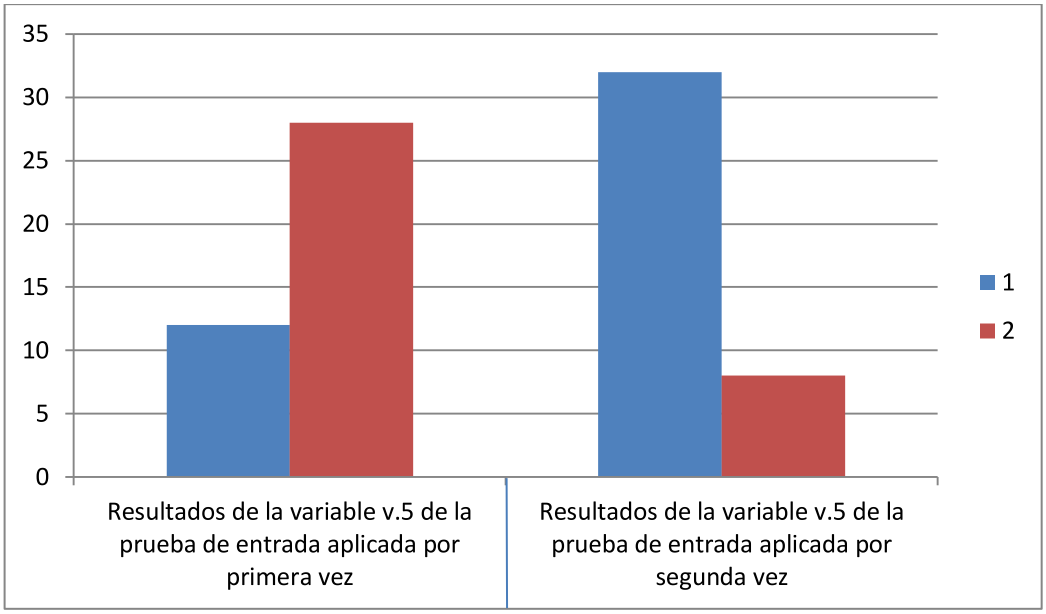
La **variable v.4: El estudiante determina cómo varían ciertas magnitudes que dependen de otras**, pasó de tomar tres veces el valor 1 (Identifica las variables que están siendo relacionadas) en la prueba de entrada aplicada por primera vez, a tomar treinta y ocho veces dicho valor en la prueba de entrada aplicada por segunda vez (Figura 36).

Figura 36. Diagrama de barras comparativo de los resultados de la variable v.4 de la prueba de entrada aplicada por primera y segunda vez.



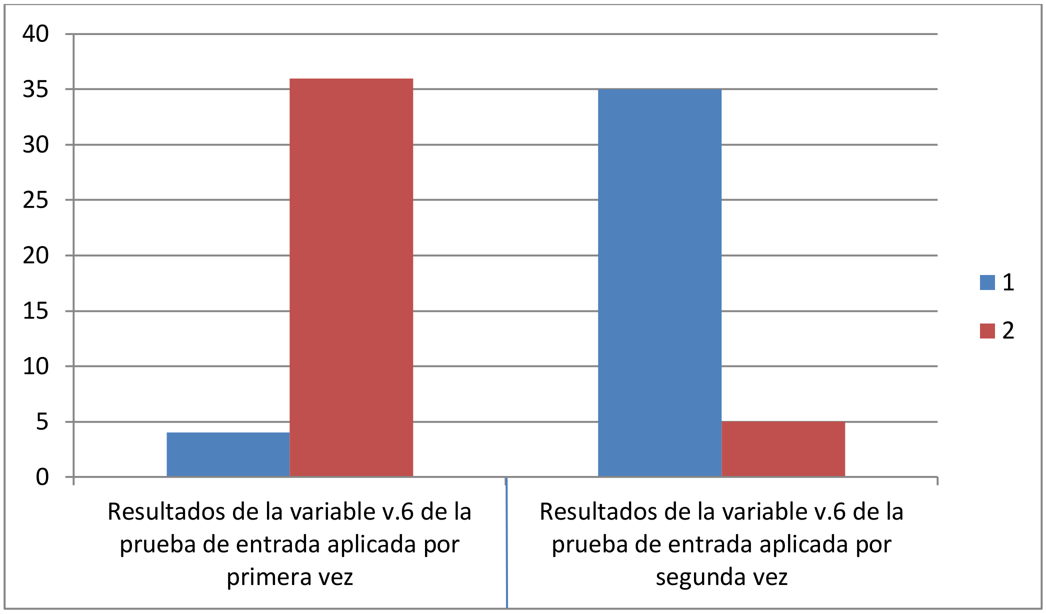
La **variable v.5: El estudiante lee gráficas de funciones**, pasó de tomar doce veces el valor 1 (Lee gráficas de funciones) en la prueba de entrada aplicada por primera vez, a tomar treinta y ocho veces dicho valor en la prueba de entrada aplicada por segunda vez (Figura 37).

Figura 37. Diagrama de barras comparativo de los resultados de la variable v.5 de la prueba de entrada aplicada por primera y segunda vez.



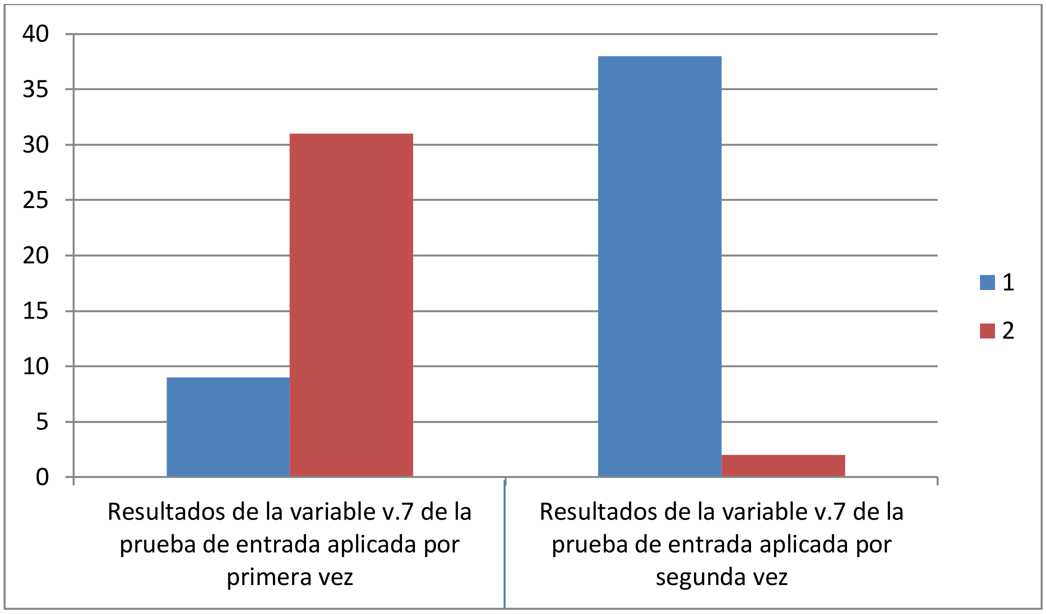
La **variable v.6: El estudiante interpreta gráficas de funciones**, pasó de tomar cuatro veces el valor 1 (Interpreta gráficas de funciones) en la prueba de entrada aplicada por primera vez, a tomar treinta y ocho veces dicho valor en la prueba de entrada aplicada por segunda vez (Figura 38).

Figura 38. Diagrama de barras comparativo de los resultados de la variable v.6 de la prueba de entrada aplicada por primera y segunda vez.



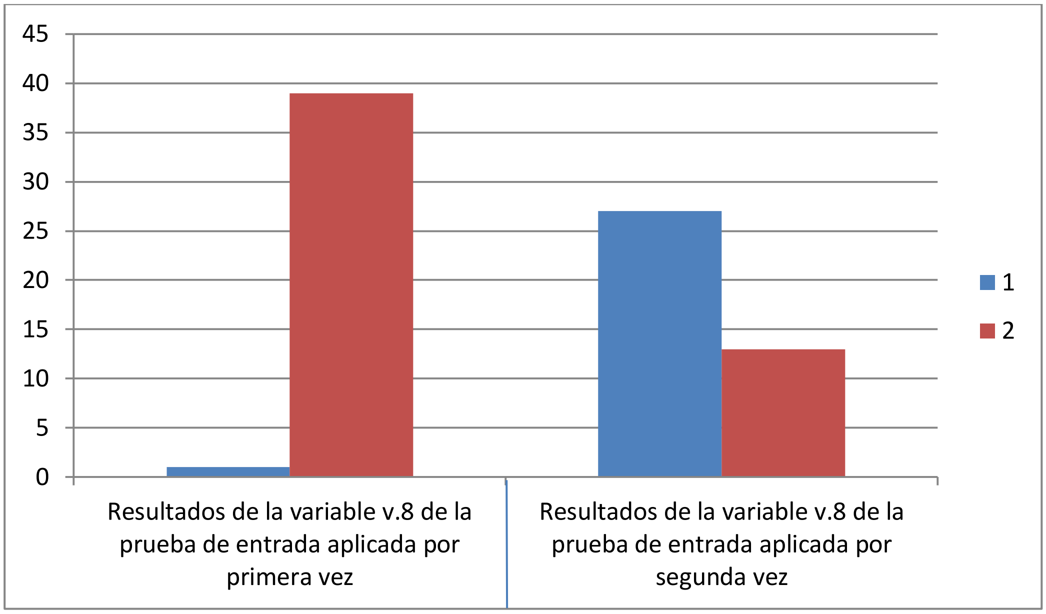
La **variable v.7: El estudiante establece relaciones entre las distintas representaciones de una función**, pasó de tomar nueve veces el valor 1 (Establece relaciones entre las distintas representaciones de una función) en la prueba de entrada aplicada por primera vez, a tomar treinta y ocho veces dicho valor en la prueba de entrada aplicada por segunda vez (Figura 39).

Figura 39. Diagrama de barras comparativo de los resultados de la variable v.7 de la prueba de entrada aplicada por primera y segunda vez.



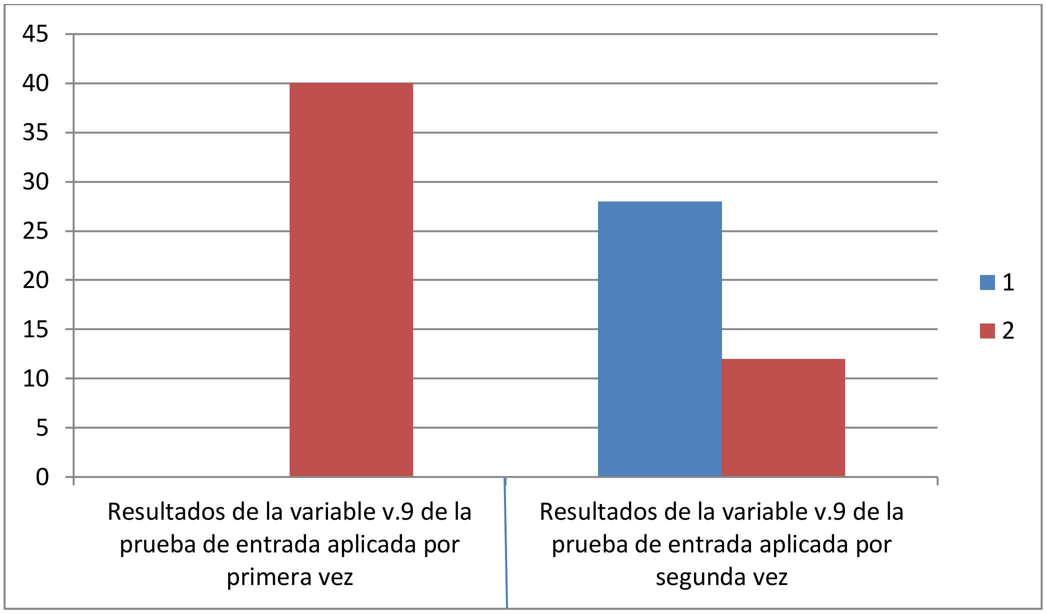
La **variable v.8: El estudiante clasifica una función dada como inyectiva, sobreyectiva o biyectiva**, pasó de tomar una vez el valor 1 (Clasifica una función dada como inyectiva, sobreyectiva o biyectiva) en la prueba de entrada aplicada por primera vez, a tomar veintisiete veces dicho valor en la prueba de entrada aplicada por segunda vez (Figura 40).

Figura 40. Diagrama de barras comparativo de los resultados de la variable v.8 de la prueba de entrada aplicada por primera y segunda vez.



La **variable v.9: El estudiante halla la inversa de una función inyectiva**, pasó de tomar cero veces el valor 1 (Halla la inversa de una función inyectiva) en la prueba de entrada aplicada por primera vez, a tomar veintiocho veces dicho valor en la prueba de entrada aplicada por segunda vez (Figura 41).

Figura 41. Diagrama de barras comparativo de los resultados de la variable v.9 de la prueba de entrada aplicada por primera y segunda vez.



Un compendio de los diagramas de barras comparativos permite concluir que la variable que presentó más evolución fue la **variable v.2: El estudiante determina cuando una regla de asignación es una función**, que pasó de tomar una vez el valor 1 (Determina cuando una regla de asignación es una función) en la prueba de entrada aplicada por primera vez, a tomar cuarenta veces dicho valor en la prueba de entrada aplicada por segunda vez; y la variable que presentó menos evolución fue la **variable v.5: El estudiante lee gráficas de funciones**, que pasó de tomar doce veces el valor 1 (Lee gráficas de funciones) en la prueba de entrada aplicada por primera vez, a tomar treinta y dos veces dicho valor (Lee gráficas de funciones) en la prueba de entrada aplicada por segunda vez.

3.4 MEDIOS APROPIADOS PARA LA ENSEÑANZA APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN EN EL SALÓN DE CLASE

Los resultados de la implementación de las estrategias didácticas de que trata el presente trabajo, mostraron que algunos medios apropiados para realizar el proceso enseñanza aprendizaje del concepto de función son: La plataforma Moodle y el programa GeoGebra. En efecto, la plataforma Moodle permitió "subir" foros, cuestionarios y establecer comunicación a través del correo (Anexos 32 y 33), y el programa GeoGebra permitió hacer simulaciones de experimentos (Anexos 25 y 42), resolver o verificar la solución dada a un problema, desde otro punto de vista (Anexos 30, 31, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40 y 41) y diseñar actividades interactivas (Anexos 27, 28, 29, 43 y 44). Todo lo cual significó que las tecnologías mencionadas, Moodle y GeoGebra, se constituyeron en una herramienta fundamental para la ejecución de las estrategias didácticas de que trató este Trabajo Final de Maestría, sin cuya instrumentación, el proceso hubiera sido asaz ineficiente.

3.5 ACTIVIDADES DE RETENCIÓN Y TRANSFERENCIA DEL APRENDIZAJE

Estos resultados también mostraron que para lograr la retención y transferencia del concepto de función, se requiere diseñar actividades que: Relacionen los contenidos que se están viendo con los que se han visto con anterioridad, y que lleven al estudiante a resolver problemas de aplicación del concepto de función, que pueden provenir del interior de las matemáticas, de otras disciplinas o de la vida cotidiana (Anexos 34 a 41).

3.6 ACTIVIDADES PARA PROCESAR LOS MATERIALES DIDÁCTICOS

De igual manera, los resultados del trabajo mostraron que las actividades de aprendizaje del concepto de función que los estudiantes deben realizar para procesar los materiales didácticos elaborados para tal fin deben ser: Actividades concretas que permitan al estudiante dar significado a los símbolos propios de la notación funcional, actividades que paseen al estudiante por los distintos lenguajes de representación de funciones, y actividades interactivas que simulen un experimento y que permitan que el estudiante observe las implicaciones o efectos de la alteración de alguno de sus elementos (Anexos 24 y 25).

4 DISCUSIÓN

El evidente mejoramiento alcanzado por los estudiantes en la interpretación simbólica de la notación funcional, se puede atribuir, de manera conjetural, a que se utilizaron estrategias didácticas que partieron de situaciones concretas, que crearon la necesidad de introducir los símbolos propios de la notación funcional, y propiciaron que el estudiante diera sentido y generalizara dichos símbolos. Conjetura que se fundamenta en los enunciados de Azcárate y Deulofeu (1), quienes mencionan que para comprender la expresión general de una función, a saber, $y = f(x)$, se requiere conocer, primero, fórmulas para variables concretas. Por otra parte, para el estudio de esta variable se utilizaron estrategias que indagaban por los valores de x para los cuales tiene sentido la expresión $y = f(x)$, es decir, indagaban por el dominio de la función f; lo cual contrasta con lo dicho por Azcárate y Deulofeu (1), cuando afirman que al considerar una función bajo la idea de variable, el papel del dominio es poco relevante.

Este contraste se debe, posiblemente, a que, cuando se trabaja con la expresión $y = f(x)$, se está asumiendo que el dominio de la función f es el mayor subconjunto de los números reales para el cual está definido el valor $f(x)$, y que no es necesario explicitarlo. Por su parte, el autor de este trabajo considera que es fundamental determinar dicho conjunto.

Los avances en la capacidad para determinar cuándo una regla de asignación es una función, se derivaría del hecho de que se emplearon estrategias didácticas que le permitieron al estudiante conocer las distintas representaciones que hay para una función, y a partir de este conocimiento, determinar cuándo una regla de asignación, en cualquiera de sus versiones, constituye una función. Lo cual coincide con la afirmación de Azcárate y Deulofeu (1), en el sentido de que el aprendizaje del concepto de función depende de la lectura de cada uno de los lenguajes de representación de dicho concepto.

Este avance también es consecuencia de la implementación de estrategias didácticas que utilizaron el contenido que se estaba desarrollando con el que ya se había desarrollado en clases anteriores. Al respecto, menciona González (4) que una manera de motivar el aprendizaje es relacionar el contenido que se está tratando con el que ya se ha tratado.

De igual manera, el alza en los resultados obtenidos por los estudiantes en la obtención de modelos a partir de una tabla de valores de una función, se originaría en el hecho de que se hizo un trabajo detallado en cuanto a lectura y escritura de datos conocidos en una tabla, para pasar a determinar los datos desconocidos, y finalmente encontrar una fórmula que describa la situación propuesta. En este sentido Azcárate y Deulofeu (1) manifiestan que el paso que sigue a la lectura de cada uno de los lenguajes de representación del concepto de función, es el de su interpretación, es decir, la adquisición de la capacidad para traducir de un lenguaje a otro.

Adicionalmente, otra característica de las estrategias didácticas empleadas para el estudio de esta variable, consistió en que se hizo énfasis en el lenguaje algebraico y en el hecho de que una fórmula de dos variables puede representar una función. Sobre el particular, Azcárate y Deulofeu (1) afirman que si bien es cierto, que reconocer el modelo y establecer la ecuación son actividades que requieren abstraer la regla de dependencia entre las dos variables; la segunda actividad implica un conocimiento del lenguaje algebraico y del hecho de que una fórmula de dos variables represente una función, por lo que resulta más difícil obtener dicha fórmula.

Los logros obtenidos por los estudiantes en su capacidad para determinar cómo varían ciertas magnitudes que dependen de otras, sería consecuencia de la implementación de estrategias didácticas que llevaron al estudiante a resolver situaciones que le dieron sentido al concepto de función. Azcárate y Deulofeu (1) afirman al respecto: "La finalidad de llegar a determinar con precisión cómo varían ciertas magnitudes que dependen de otras, es lo que le da sentido al estudio de las funciones". En este mismo sentido, Pluvinage y cuevas (9) mencionan que enunciando el concepto de función a través de la dependencia entre variables, se conduce al estudiante a la comprensión de dicho concepto.

Para el estudio de esta variable se utilizaron simulaciones de experimentos asistidas por computador, y que emplearon el programa GeoGebra. La pertinencia de utilizar estas simulaciones parece fundamentarse en que es el lenguaje más cercano al fenómeno estudiado, y el menos simbólico. Estas simulaciones fueron dinámicas, y permitieron que los estudiantes observaran cuáles elementos de una figura geométrica permanecen constantes y cuales varían; al hacer variar otro de sus elementos. Lo anterior parece coincidir con las aseveraciones de Azcárate y Deulofeu (1): "El modelo físico o simulación es el lenguaje más cercano al fenómeno estudiado, el menos simbólico, y que aparece al realizar el experimento o al simularlo en un computador". Estos autores resaltan el trabajo hecho por E. Castelnuovo, y afirman que ésta reivindicó un tratamiento dinámico de las figuras geométricas, para permitir un acercamiento al concepto de función; Castelnuovo planteó que, dada una figura geométrica, se toma uno de sus elementos como variable, y se fija el valor de otros, con el objetivo de estudiar qué sucede con el resto de elementos, es decir, cuáles permanecen constantes, cuáles varían y cómo lo hacen en función de la variable inicial.

En cuanto a los mejoramientos de los estudiantes en la lectura e interpretación de gráficas de funciones, se explicarían por el hecho de que se emplearon estrategias didácticas que exigieron la lectura e interpretación de gráficas que representaban información sobre diversos fenómenos de cambio. En este sentido, Azcárate y Deulofeu (1) aseveran que en el mundo actual existe una gran cantidad de información sobre diversos fenómenos de cambio, y que por esta razón, un objetivo de las matemáticas debe ser capacitar al estudiante para la lectura e interpretación de gráficas.

Estas estrategias didácticas indujeron al estudiante a que, a partir de una gráfica, determinara las variables representadas en los ejes, identificara los puntos de la gráfica, identificara si un punto dado por sus coordenadas pertenece o no a la gráfica, y considerara intervalos en los que se mantiene o se modifica, de una determinada manera, la variación de la función.

En lo que hace referencia al establecimiento de relaciones entre las distintas representaciones de una función, los mejores desempeños de los estudiantes se deberían a que se utilizaron estrategias didácticas que los condujeron a un conocimiento de cada uno de los lenguajes de representación de una función, y a traducir de un lenguaje a otro. Esto contrasta con el trabajo que realizan la mayoría de los textos, que solo desarrollan un único proceso de traducción, de la fórmula a la gráfica. En este sentido, Guzmán (5) evidenció que no se ha dado la suficiente importancia a la relación que existe entre las diversas formas de representación de una función, y afirma que los estudiantes no logran pasar del lenguaje determinado al lenguaje natural y viceversa. Y continúa diciendo que los estudiantes presentan mucha dificultad en pasar de la representación gráfica a la algebraica.

El empleo de las estrategias para trabajar esta variable (v.7), también tiene sustento en la afirmación de Azcárate y Deulofeu (1): “El aprendizaje de las funciones pasa, en primer lugar, por un conocimiento de cada uno de estos lenguajes de representación, es decir, por la adquisición de la capacidad para leer e interpretar cada uno de ellos y posteriormente para traducir de uno a otro”.

Con relación al avance alcanzado por los estudiantes en la capacidad para clasificar una función dada como inyectiva, sobreyectiva o biyectiva, se derivaría del hecho de que se utilizaron actividades grupales que indagaron al estudiante por la clasificación de una función dada en cualquiera de sus versiones. Igualmente, a que se diseñó una actividad interactiva con el programa GeoGebra que tuvo como objetivo utilizar la prueba de la recta horizontal.

En lo que respecta al alza en sus competencias para determinar la inversa de una función inyectiva, se originaría en el hecho de que se emplearon estrategias didácticas que utilizaron actividades variadas, a saber, una actividad interactiva con el programa GeoGebra que tuvo como objetivo construir la gráfica de una función inyectiva, a través de la reflexión de los puntos de esta, sobre la recta de ecuación $y = x$.

Este trabajo mostró que al utilizar el programa GeoGebra para elaborar actividades interactivas, los estudiantes perciben mejor los efectos que trae consigo una alteración en algún elemento. Así mismo, el trabajo evidenció que el empleo de este programa para verificar las soluciones dadas teóricamente a algunos ejercicios, permite a los estudiantes conocer otras formas de encontrar tales soluciones, y hacer comparaciones. A este respecto, Berenguer *et al* (2) dicen que GeoGebra tiene un enorme potencial para trabajar, de manera sencilla, con representaciones gráficas y permite ver cómo se definen, cómo se generan, cómo se representan y cómo se mueven las gráficas. En efecto, GeoGebra permite hacer construcciones básicas (rectas, círculos, segmentos), evidenciar las relaciones en las construcciones (intersecciones, paralelismo, perpendicularidad, proyecciones) y comprobar el efecto que en las gráficas de las curvas genera la modificación de alguno de los parámetros que las definen. Este último hecho hace que las figuras dejen de ser estáticas para convertirse en dinámicas.

Igualmente, el trabajo mostró que si se utilizan plataformas como Moodle para abrir foros y subir cuestionarios, los estudiantes se ven obligados a interactuar con sus compañeros y el docente; lo cual fortalece el proceso de discusión y organización, y pueden hacer una autoevaluación de la comprensión de algún concepto. A este respecto, Ros (10) dice que Moodle presenta tres grandes recursos: Gestión de contenidos, comunicación y evaluación. En efecto, la plataforma Moodle se puede emplear para presentar a los estudiantes los apuntes de un curso, comunicar al profesor con sus alumnos y fomentar el trabajo cooperativo a través de foros, enviar tareas a los estudiantes, evaluar a los estudiantes con cuestionarios de temas específicos, con retroalimentación inmediata a los alumnos de sus resultados.

El trabajo mostró que al utilizar material didáctico que parta de situaciones concretas (ejemplo o problema), los conceptos que emergen de tales situaciones se hacen más comprensibles y los símbolos toman sentido. Sobre el particular, Azcárate y Deulofeu (1) mencionan que los procedimientos de lectura y construcción de tablas, y de lectura e interpretación de gráficas, se pueden abordar, y traen consigo una introducción al concepto de función, a partir de situaciones reales que sirven de soporte concreto para la elaboración de dicho concepto.

Y continúan: "Una forma didáctica correcta de exponer las características esenciales de los modelos lineal, cuadrático y exponencial, partirá siempre de problemas reales, de situaciones que pueden ser ajenas a las matemáticas o que pueden ser una parte de ellas".

En síntesis, para finalizar, se puede afirmar que el trabajo logró mejorar las competencias de los estudiantes del curso de Álgebra y Funciones de la Universidad Icesi, para apropiar el concepto de función.

5 CONCLUSIONES

- La plataforma Moodle y el programa GeoGebra, se constituyeron en los medios que mostraron ser eficaces para ejecutar las estrategias didácticas que se aplicaron en el proceso enseñanza aprendizaje del concepto de función en los estudiantes del curso de Álgebra y Funciones de la Universidad Icesi.

- Las actividades que relacionen los contenidos que se están estudiando en un momento dado, con los que se han estudiado con anterioridad, y que conduzcan al estudiante a resolver problemas de aplicación del concepto de función, provenientes del interior de las matemáticas, de otras disciplinas o de la vida cotidiana; resultaron apropiadas para lograr la retención y transferencia del concepto de función.

- Se definieron las siguientes actividades de aprendizaje del concepto de función, que los estudiantes deberán ejecutar para procesar los materiales didácticos elaborados para tal fin:

    - Actividades que partan de situaciones concretas y que permitan al estudiante dar significado a los símbolos propios de la notación funcional;

    - actividades que paseen al estudiante por los distintos lenguajes de representación de funciones;

    - y actividades interactivas que simulen un experimento y que permitan que el estudiante observe las implicaciones o efectos de la alteración de alguno de sus elementos.

- Se mejoró las competencias de los estudiantes del curso de Álgebra y Funciones de la Universidad Icesi, para apropiar el concepto de función, evidenciadas en avances en los siguientes ítem:

    - dar significado a los símbolos propios de la notación funcional;

    - determinar cuándo una regla de asignación constituye una función;

    - obtener modelos a partir de una tabla de valores de una función;

- determinar cómo varían ciertas magnitudes que dependen de otras;
- leer gráficas de funciones;
- interpretar gráficas de funciones;
- establecer relaciones entre las distintas representaciones de una función;
- clasificar una función dada como inyectiva, sobreyectiva o biyectiva; y
- hallar la inversa de una función inyectiva.

6 RECOMENDACIONES

- Una buena manera de introducir el concepto de función, es a partir de situaciones concretas, ya que éstas permiten dar sentido a los símbolos propios de la notación funcional.
- La introducción de variables particulares, facilita el paso a la ecuación general $y = f(x)$.
- La exigencia de traducción de un registro semiótico a otro, ayuda a la comprensión integral del concepto de función.
- El empleo de programas interactivos, permite que las figuras dejen de ser estáticas para convertirse en dinámicas.

BIBLIOGRAFÍA

1. AZCÁRATE, Carmen; DEULOFEU, Jordi. Funciones y gráficas. Madrid: Síntesis, 1996.

2. BERENGUER, Maribel. *et al*. Uso de Geogebra como complemento en la enseñanza de matemáticas en el grado de Arquitectura. Granada. Departamento de Matemática Aplicada. E. T. S. de arquitectura. Universidad de Granada. [Citado, 10 septiembre, 2011]. Disponible en: http://web.ua.es/es/ice/jornadas-redes/documentos/2011/posters/184346.pdf

3. GARCÍA, Gloria; SERRANO, Celly. Variables institucionales en el conocimiento profesional del docente: El caso de la función. En: Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Noviembre. 2000. No 3. p. 357-370.

4. GONZÁLEZ ZAMORA, José Hipólito. El proyecto educativo de la universidad ICESI y el aprendizaje activo. Santiago de Cali: Universidad ICESI, 2006. (Cartilla docente).

5. GUZMÁN, Ismenia. Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: Voces de los estudiantes. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (1). 1998.

6. HERNÁNDEZ, Carlos Augusto. Presentaciones de las lecciones del 14 de agosto al 20 de noviembre de 2010. Asignatura Orígenes de la Ciencia Moderna. Bogotá: Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de Colombia [Documentos de Microsoft PowerPoint]. 2010.

7. KLINE, Morris. El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días, II. Madrid: Alianza Editorial, 1992.

8. PEREZ, Yolanda. Manual práctico de apoyo docente. Monterrey: Centro para la excelencia académica, ITESM campus, 1995.

9. PLUVINAGE, François; CUEVAS, Armando. Un acercamiento didáctico al concepto de función: Una mirada fugaz, una mirada externa y comprensiva, una mirada actual. México: Santillana, 2006. (Matemática Educativa, treinta años, Aula XXI Cinvestav-IPN).

10. ROS, Iker. Moodle, la plataforma para la enseñanza y organización escolar. Ikastorratza, e- Revista de didáctica 2, 2008. (ISSN: 1988-5911). [Citado, 10 septiembre, 2011]. Disponible en:

http://www.ehu.es/ikastorratza/2_alea/moodle.pdf

11. RUÍZ, Luisa. La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico. Granada: Publicaciones de la Universidad de Jaén. 1998.

12. SIERPINSKA, Anna. Sobre la comprensión de la noción de función. Washington, DC: Concordia University. Dubinski y Harel (eds), 1992.

13. UNIVERSIDAD ICESI. Programa académico de la asignatura Álgebra y Funciones. Santiago de Cali: Departamento de Matemáticas y Estadística, 2011 (Documento multicopiado para distribución entre los estudiantes de la asignatura).

ANEXOS

Anexo 1. Funciones. Definición y conceptos relacionados.

UNIVERSIDAD ICESI.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

Curso de Álgebra y funciones

Material preparado por Carlos A Quintero.

Sesión # 16: FUNCIONES. DEFINICIÓN Y CONCEPTOS RELACIONADOS.

Ejemplo 1: Un grupo del curso de Álgebra y funciones –nos referiremos a él como el grupo 4- está conformado por estudiantes de apellidos: Arango, Aya, Caicedo, Cedeño, Delgado, Echeverry, Endo, Escobar, Fory, Lozano, Martínez, Parra, Payán, Peña, Prado, Ramírez, Revelo, Ruano, Sánchez, Serna, Tabares y Viveros. A cada estudiante de este grupo, se le asigna un número de lista del 1 al 22, y en el orden mencionado.

Observe que hay una regla de asignación según la cual, a cada estudiante se le asigna un número de lista. Además, cada estudiante pertenece a un cierto conjunto que es, en este caso, el de los estudiantes del grupo del curso de Álgebra y Funciones que se menciona. Otro aspecto para tener en cuenta es que existe un conjunto que tiene a todos los números de lista como elementos. Note que se dice un conjunto y no el conjunto; en este caso, un conjunto puede ser el formado por todos los números naturales de 1 a 22 o 25, otro puede ser el formado por todos los números naturales de 1 a 30, etc. Un último aspecto que reviste especial importancia, es que no existe ningún estudiante al cual se le asignen dos números de lista.

Definición 1: Una **función** f de un conjunto A en un conjunto B es una regla que asigna, a cada elemento x del conjunto $A,$ exactamente un elemento, simbolizado $f(x)$, del conjunto B.

El símbolo $f(x)$ se lee "f de x". Representa el valor que toma la función f en x, y es usualmente llamado la “imagen de x mediante f”. Para indicar que f es una función de un conjunto A en un conjunto B, se utiliza la notación: $f: A \to B$.

A los conjuntos A y B de la definición anterior, se les llama **dominio** y **codominio** de la función, respectivamente.

De acuerdo con la definición, la regla de asignación del ejemplo anterior es una función f del conjunto A formado por los estudiantes del grupo mencionado, en el conjunto $B = \{1,2,3,\dots,22\}$ (o en el conjunto $B = \{1,2,3,\dots,25\}$) ¿Por qué? Halle el valor de $f(Caicedo)$ y $f(Parra)$. El dominio de la función f es el conjunto A y el codominio es el conjunto B, es decir, $f: A \to B$

Ejercicio 1: Considere la regla f que asigna a cada elemento del conjunto $A = \{x: x\ es\ un\ estudiante\ del\ curso\ de\ Álgebra\ y\ Funciones\ del\ grupo\ 4\}$ su edad en años cumplidos. Determine si la regla f es una función del conjunto A en el conjunto N, de los números naturales. ¿Es el conjunto N de los naturales, el único codominio válido para la regla f?

Ejercicio 2: Considere los conjuntos M y H, de las mujeres y de los hombres, respectivamente, del curso de Álgebra y Funciones del grupo 4 y la regla que asigna a cada mujer del conjunto M, un hombre del conjunto H que tenga su misma edad en años cumplidos. Determine si esta regla es una función del conjunto M en el conjunto H.

Ejemplo 2: Considere la regla f que asigna a cada número real, su tripe, es decir, el número que se resulta de multiplicar por 3 el número dado. Determine si esta regla es una función de los reales en los reales, y escriba la fórmula que la define.

Solución: Dado que todo número real tiene asociado su triple, que es un número real, y que este triple es único, la regla dada es una función de los reales en los reales. El triple de -2 es $3(-2) = -6$, el triple de 0 es $3(0) = 0$, el triple de $\frac{1}{4}$ es $3\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$, el triple de π es $3(\pi) = 3\pi$, y en general el triple de x es $3(x) = 3x$. Por lo tanto la fórmula que define la función es $f(x) = 3x$. Note que el dominio de la función es el conjunto de los números reales, que es también el codominio, es decir, $f: R \to R$.

Ejercicio 3: Considere la regla f que asigna a cada número real, su cuadrado. Determine si esta regla es una función de los reales en los reales, y escriba la fórmula que la define.

Ejercicio 4: Considere la regla f que asigna a cada número real, su cubo. Determine si esta regla es una función de los reales en los reales, y escriba la fórmula que la define.

Ejemplo 3: Una pelota de goma se deja caer desde una altura de $60\ cm$. La altura alcanzada por esta pelota después de cada rebote, es el 60% de la altura alcanzada después del rebote inmediatamente anterior.

- Complete la siguiente tabla:

número de rebotes	0	1	2	3	n
altura en cm	60				

- Escriba la fórmula que expresa la altura h en función del número de rebotes n.
- Encuentre la altura que alcanza la pelota después del décimo rebote.

Solución:

- La altura que alcanza la pelota después del primer rebote es el 60% de 60, es decir, $\frac{60}{100}60 = \frac{3}{5}60 = 36\ cm$, La altura que alcanza la pelota después del segundo rebote es el 60% de $\frac{3}{5}60$, es decir, $\frac{60}{100}\left(\frac{3}{5}60\right) = \frac{3}{5}\left(\frac{3}{5}60\right) = 60\left(\frac{3}{5}\right)^2 = 21{,}6\ cm$. La altura que alcanza la pelota después del tercer rebote es el 60% de $\left(60\left(\frac{3}{5}\right)^2\right)$, es decir, $\frac{60}{100}\left(60\left(\frac{3}{5}\right)^2\right) = 60\left(\frac{3}{5}\right)^3 = 12{,}96\ cm$. De acuerdo con la regularidad observada la altura que alcanza la pelota después del n $ésimo$ rebote es $60\left(\frac{3}{5}\right)^n$.
- Por lo tanto la fórmula que expresa la altura h en función del número de rebotes n, es $h(n) = 60\left(\frac{3}{5}\right)^n$.

- La altura que alcanza la pelota después del décimo rebote es $h(10) = 60\left(\frac{3}{5}\right)^{10} = 0{,}36\ cm$.

Ejercicio 5: Carlos se ganó $\$16.000.000$ en una rifa y decidió invertirlo en una entidad financiera que paga el 10% de interés anual sobre el dinero invertido. Suponga que Carlos no hace retiros.

- Complete la siguiente tabla:

Número t de años transcurridos	0	1	2	3	t
Dinero D en pesos que Carlos tiene en el banco	$16.000.000$				

- Escriba la fórmula que expresa el dinero D que Carlos tiene en el banco, en función del número t de años transcurridos.
- Determine la cantidad de dinero que tiene Carlos en el banco, después de seis años.

Ejercicio 6: De acuerdo con la Geometría plana, la suma de la medida de los ángulos interiores de todo triángulo es $180°$.

- ¿Cuántos triángulos se obtienen al unir un vértice dado con los vértices no adyacentes en un cuadrilátero? ¿En un pentágono? ¿En un hexágono? ¿Y en un polígono de n lados?
- Complete la siguiente tabla:

número de lados del polígono	3	4	5	6	n
suma de los ángulos (en grados) del polígono	180	360			

- Escriba la fórmula que expresa la suma S de los ángulos de un polígono, en términos del número n de sus lados.
- Determine la suma de los ángulos de un decágono.
- Determine el número de lados de un polígono, si la suma de sus ángulos es $2700°$.
- ¿La fórmula encontrada define una función del conjunto $A = \{3,4, \dots n, \dots\}$ en el conjunto de los números naturales? Explique.

Ejercicio 7: Al iniciar una reunión los asistentes se saludan de apretón de mano (un apretón de manos por cada par de personas). La siguiente tabla muestra el número de apretones de mano, según el número de asistentes a la reunión. Complétela.

número de asistentes	2	3	4	5	n
número de apretones de mano	1	3			

- Escriba la fórmula que expresa el número N de apretones de mano, en términos del número n de asistentes a la reunión.
- ¿Qué sucede si a la reunión asiste una sola persona?
- Determine el número de apretones de mano, si a la reunión asistieron veinticinco personas.
- Determine el número de asistentes a la reunión, si se dieron cuarenta y cinco apretones de mano.
- ¿La fórmula encontrada define una función de los números naturales en los enteros no negativos? Explique.

Ejercicio 8: Considere la regla f que asigna a cada par ordenado (x, y) de números reales, el par ordenado $(x, -y)$. Determine si esta regla es una función de R^2 en R^2, y escriba la fórmula que la define.

Ejercicio 9: Considere la regla f que asigna a cada terna ordenada (x, y, z) de números reales, el par ordenado (x, y). Determine si esta regla es una función de R^3 en R^2, y escriba la fórmula que la define.

Ejemplo 4: Considere la regla que asigna a cada número real, su raíz cuadrada. ¿Es esta regla una función de los reales en los reales? ¿Es esta regla una función del intervalo $[0,\ )$ en los reales? ¿Es esta regla una función de los reales en los complejos? En caso de serlo, escriba la fórmula que la define.

Solución: Dado que los únicos números reales que tienen raíz cuadrada en el conjunto de los números reales, son los mayores o iguales que cero, entonces la regla no es una función de los reales en los reales; pero sí lo es del intervalo $[0,\ )$ en los reales. Además, como todo número real tiene raíz cuadrada en el conjunto de los números complejos (¿Por qué?), entonces esta regla corresponde también a una función de los reales en los complejos. Es decir, $f: [0,\ ) \to R$ y $g: R \to C$ definidas por las fórmulas $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{x}$ son funciones.

Definición 2: Toda función de un subconjunto cualquiera de los reales en un subconjunto de los reales, se llama **función real de variable real**.

En este curso solo se trabajará con funciones de valor real y de variable real. Por esta razón, se escribirá simplemente "sea f la función definida por $f(x) =$ ______". En este caso, se entenderá por dominio de f el mayor conjunto de números reales para los cuales el valor calculado $f(x)$ es también un número real. En el ejemplo 4 el dominio de f es el intervalo $[0,\ )$, y debe ser claro que en cualquier subconjunto del intervalo $[0,\ )$, la regla también describe una función.

Ejemplo 5: Halle el dominio de la función definida por la fórmula $f(x) = 3x^2 - 6x$.

Solución: Como en todo polinomio en la variable x, ésta puede tomar cualquier valor real, entonces el dominio de f es el conjunto de los números reales. Por lo tanto hablamos de la función $f: R \to R$ definida por la fórmula $f(x) = 3x^2 - 6x$.

Ejercicio 10: Halle el dominio de la función definida por la fórmula $f(x) = x^3 - x$.

Ejemplo 6: Halle el dominio de la función h definida por la fórmula $h(x) = \frac{3x-2}{2x+3}$.

Solución: Para que un cociente esté definido, se requiere que el denominador sea diferente de cero. En este caso hay que exigir que $2x+3 \neq 0$, lo cual sucede si y sólo si $x \neq -\frac{3}{2}$. Por lo tanto, el dominio de f es el conjunto $R - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$. Tenemos así la función $h: R - \left\{-\frac{3}{2}\right\} \rightarrow R$ definida por la fórmula $h(x) = \frac{3x-2}{2x+3}$.

Ejercicio 11: Halle el dominio de la función definida por la fórmula $f(x) = \frac{5x+1}{4x-7}$.

Ejercicio 12: Halle el dominio de la función definida por la fórmula $g(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$.

Ejercicio 13: Halle el dominio de la función definida por la fórmula $h(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$.

Ejemplo 7: Halle el dominio de la función definida por la fórmula $f(x) = \sqrt{x^2-16}$.

Solución: Como se mencionó en el ejemplo 4, los únicos números reales que tienen raíz cuadrada en el conjunto de los números reales son los mayores o iguales que cero. Entonces en este caso se exige que $x^2 - 16 \geq 0$, lo cual sucede si $x \leq -4$, o si $x \geq 4$. Por lo tanto el dominio de f es el conjunto $(-\infty,-4] \cup [4,\infty)$. Es decir $f: (-\infty,-4] \cup [4,\infty) \rightarrow R$ es una función definida por la fórmula $f(x) = \sqrt{x^2-16}$.

Considere la regla que asigna a cada estudiante del curso de Álgebra y Funciones del grupo 4 el número del conjunto $B = \{1,2,3,\ldots,50\}$ que corresponde a su edad en años cumplidos. La lista de las edades que tienen los estudiantes de tal grupo, ¿Coincide con el conjunto B?

Definición 3: El **rango** de una función f de un conjunto A en un conjunto B, es el subconjunto C de B, de todos los valores posibles de $f(x)$ conforme x varía en todo el dominio de f.

Ejemplo 8: Considere la regla f, de los reales en los reales, que asigna a cada número real su valor absoluto. Justifique por qué esta regla es una función; escriba la fórmula que la define, y determine el rango de f.

Solución: Como para cada número real está definido su valor absoluto, y no hay un número real que tenga dos valores absolutos, entonces la regla f es una función de los reales en los reales. La fórmula que la define es $f(x) = |x|$, y como $|x| \geq 0$ para todo número real x, entonces el rango de f es el conjunto $[0,\infty)$. **Note que el rango no necesariamente coincide con el codominio de la función.**

Ejercicio 14: Determine el rango de las funciones de los ejemplos 1, 2 y 4.

Ejercicio 15: Determine el rango de las funciones de los ejercicios 1, 3, 4, 8, y 9.

Ejercicio 16: Halle el rango de la función $f: R \rightarrow R$ tal que $f(x) = 2$, para todo x. Determine el valor de $f(x+1)$ y el valor de $f(x+h)$.

Anexo 2. Gráfica de una función.

UNIVERSIDAD ICESI.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

Curso de Álgebra y funciones

Material preparado por Carlos A Quintero.

Sesión # 17: GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN.

Definición 4: La **gráfica** de una función de dominio A, es el conjunto de todos los pares ordenados $\left(x, f(x)\right)$, para cada valor de x en el conjunto A.

Como a cada par ordenado (x, y) de números reales, le corresponde un punto $P(x, y)$ en el plano, entonces la gráfica de una función real de variable real f, es el conjunto de los puntos $\left(x, f(x)\right)$ del plano, para cada valor de x en el dominio de la función f.

Ejemplo 9: Considere la función f definida por $f(x) = \sqrt{x}$ (ver ejemplo 4).

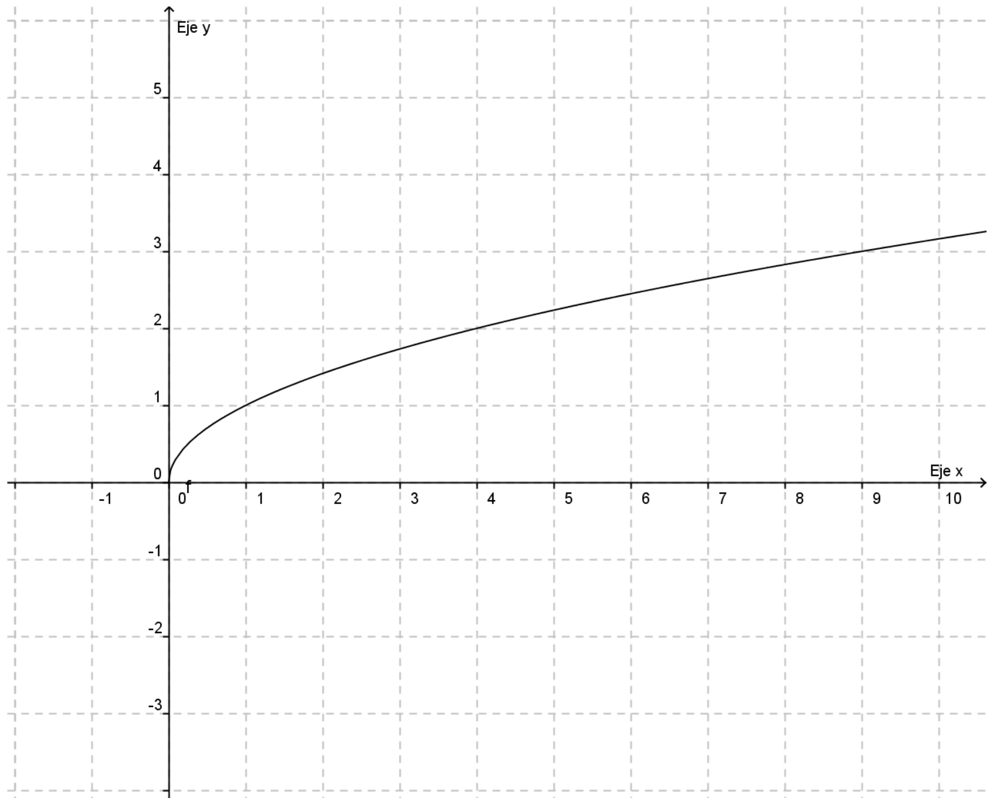
- Construya una tabla de valores de la función f.
- Haga la gráfica de la función f.

Solución:

-

x	0	1	3	4	9
$f(x)$	$\sqrt{0} = 0$	$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt{3} = 1{,}7\ldots$	$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{9} = 3$

-



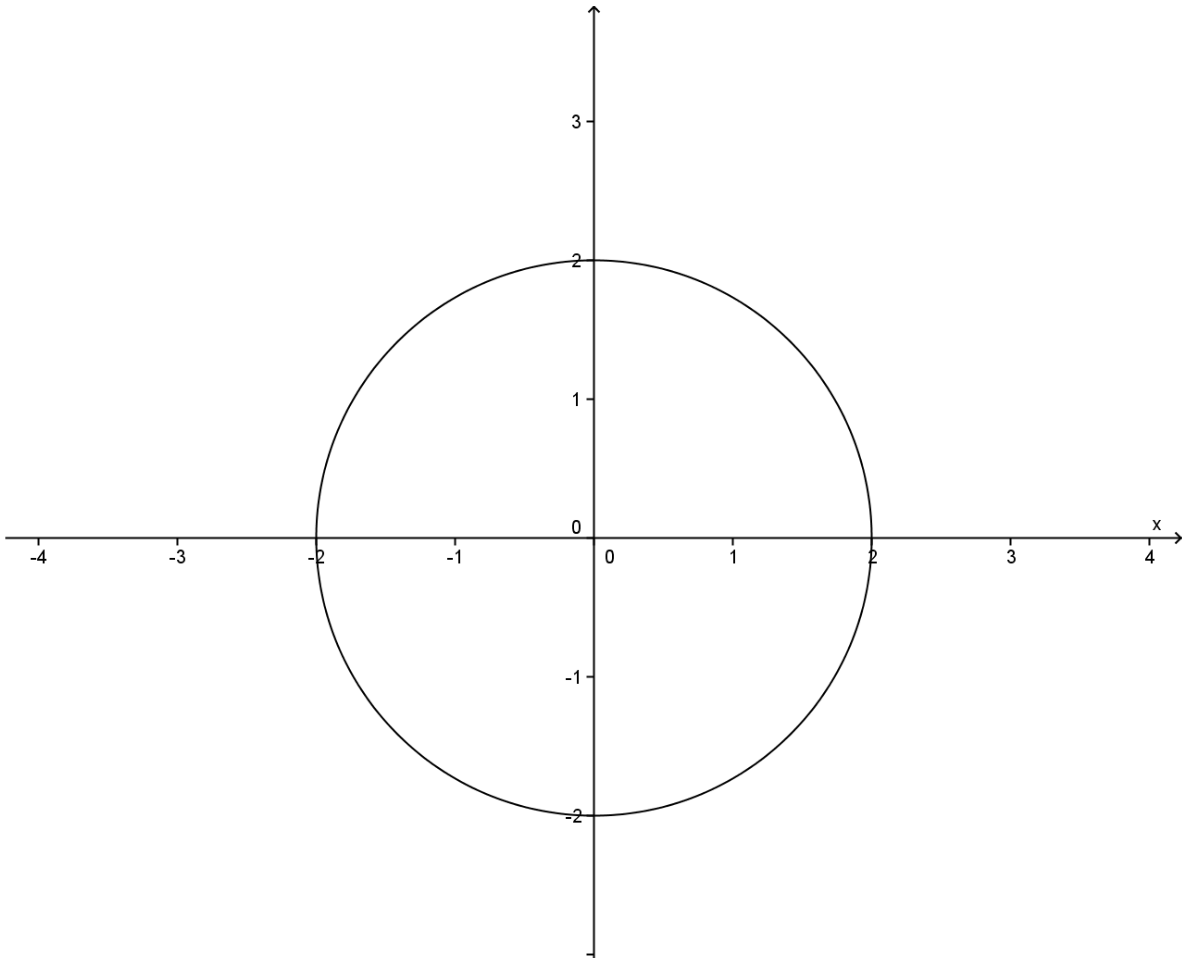
Observe que si se conoce la gráfica de una función de variable real x y de valor real $f(x)$, su dominio queda determinado por el conjunto de abscisas de los puntos que se obtienen al proyectar la gráfica de la función sobre el eje x, y su rango queda determinado por el conjunto de ordenadas de los puntos que se obtienen al proyectar la gráfica de la función sobre el eje y. En el ejemplo anterior, tanto el dominio como el rango, son el intervalo $[0,\infty)$.

Ejercicio 17: Construya la gráfica de cada una de las siguientes funciones en su dominio.

- $f(x) = 2x - 1$.
- $g(x) = |2x - 1|$.
- $h(x) = \frac{|2x-1|}{2x-1}$.

A partir de la gráfica de una relación entre elementos de dos conjuntos, se puede determinar si la relación es o no una función.

Ejemplo 10: Decida si la circunferencia de la siguiente gráfica corresponde o no a una función del intervalo $[-2,2]$ en el conjunto de los números reales. Justifique su decisión.

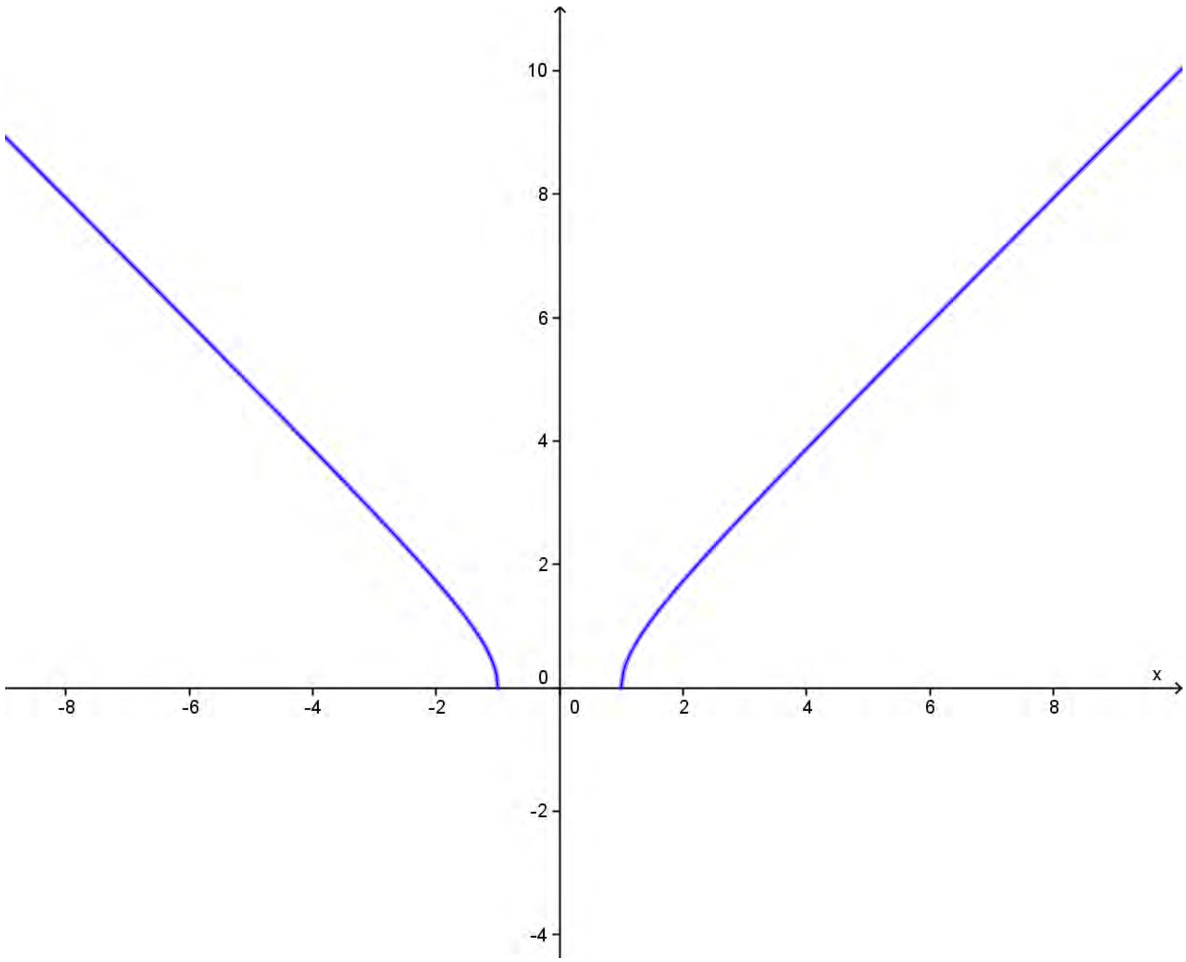


Solución:

En la gráfica se observa que todo número real en el intervalo $(-2,2)$ tiene dos imágenes. En particular el número 0 tiene como imágenes a los números -2 y 2. Por lo tanto la gráfica mostrada no corresponde a una función del intervalo $[-2,2]$ en el conjunto de los números reales.

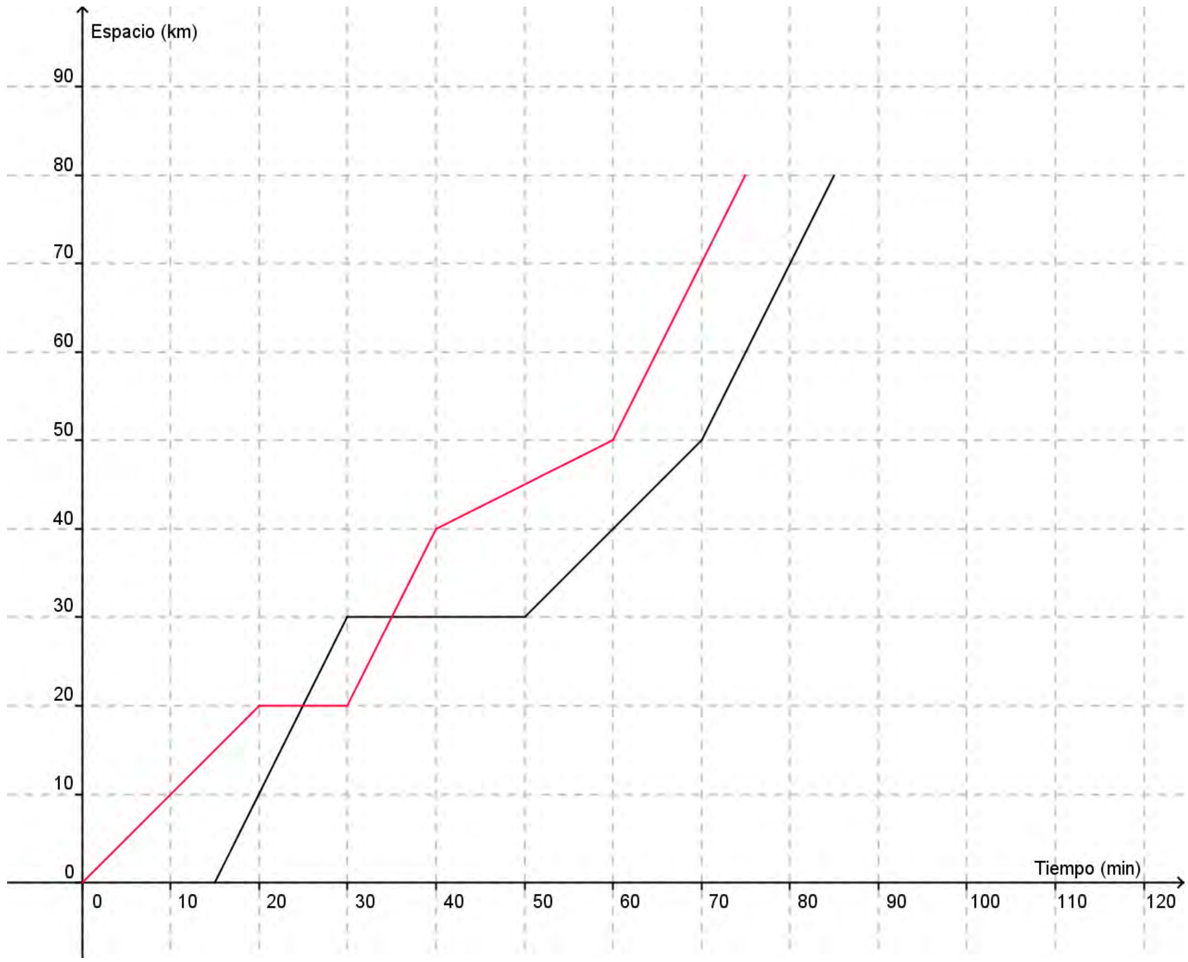
El hecho de que un número real a tenga dos o más imágenes significa, geométricamente, que la recta vertical que pasa por el punto $P(a,0)$ corta a la gráfica en dos o más puntos. Esto constituye un indicador de que la gráfica no corresponde a una función, indicador que se conoce como “la prueba de la recta vertical”.

Ejercicio 18: Determine si la siguiente gráfica corresponde a una función del conjunto de los números reales en el conjunto de los números reales. Justifique.



En muchas ocasiones es necesario comparar dos o más funciones, de las cuales se conoce su gráfica. Para hacer este tipo de comparaciones es necesario leer e interpretar las gráficas de las funciones dadas.

Ejemplo 11: Las gráficas que se muestran a continuación, ilustran el espacio recorrido por dos automóviles en cada tiempo t, en minutos, al realizar un viaje de $80\ km$. (El espacio recorrido por el primer auto está representado por la gráfica que empieza en el punto (0,0), y el espacio recorrido por el segundo auto está representado por la gráfica que empieza en el punto (15,0)).



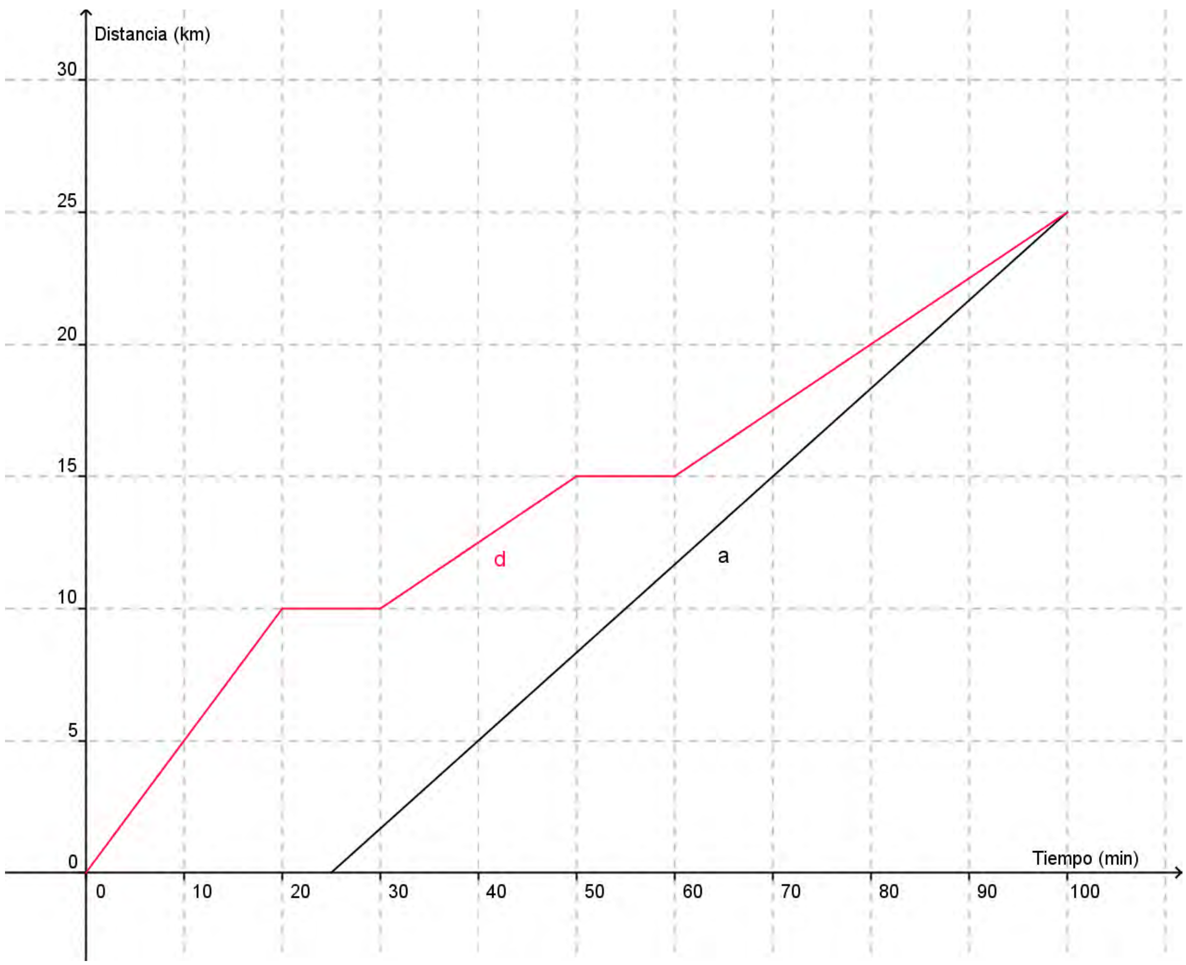
- ¿En qué instante salió cada automóvil?
- ¿Cuál auto tardó más tiempo en realizar el recorrido? ¿Cuál auto llegó primero?
- ¿Cuánto tiempo estuvo detenido cada auto? ¿En qué kilómetro se detuvieron?
- ¿Cuándo la velocidad del primer auto fue mayor? ¿Cuál es el valor de esta velocidad máxima?

Solución:

- El auto 1 salió en $t = 0\ \ minutos$, y el auto 2 salió $15\, minutos$ después.
- El auto 1 tardó $75\, minutos - 0\, minutos = 75\, minutos$, y el auto 2 tardó $85\, minutos - 15\, minutos = 70\, minutos$. Por lo tanto, el auto 1 tardó más tiempo en realizar el recorrido. El auto 1 llegó a la meta en el instante $75\, minutos$, y el auto 2 lo hizo en el instante $85\, minutos$, así que el auto 1 llegó primero a la meta.
- El auto 1 estuvo detenido $10\, minutos$ (entre el minuto 20 y el minuto 30), y el auto 2 estuvo detenido $20\, minutos$ (entre el minuto 30 y el minuto 50). El auto 1 se detuvo en el kilómetro 20, y el auto 2 lo hizo en el kilómetro 30.

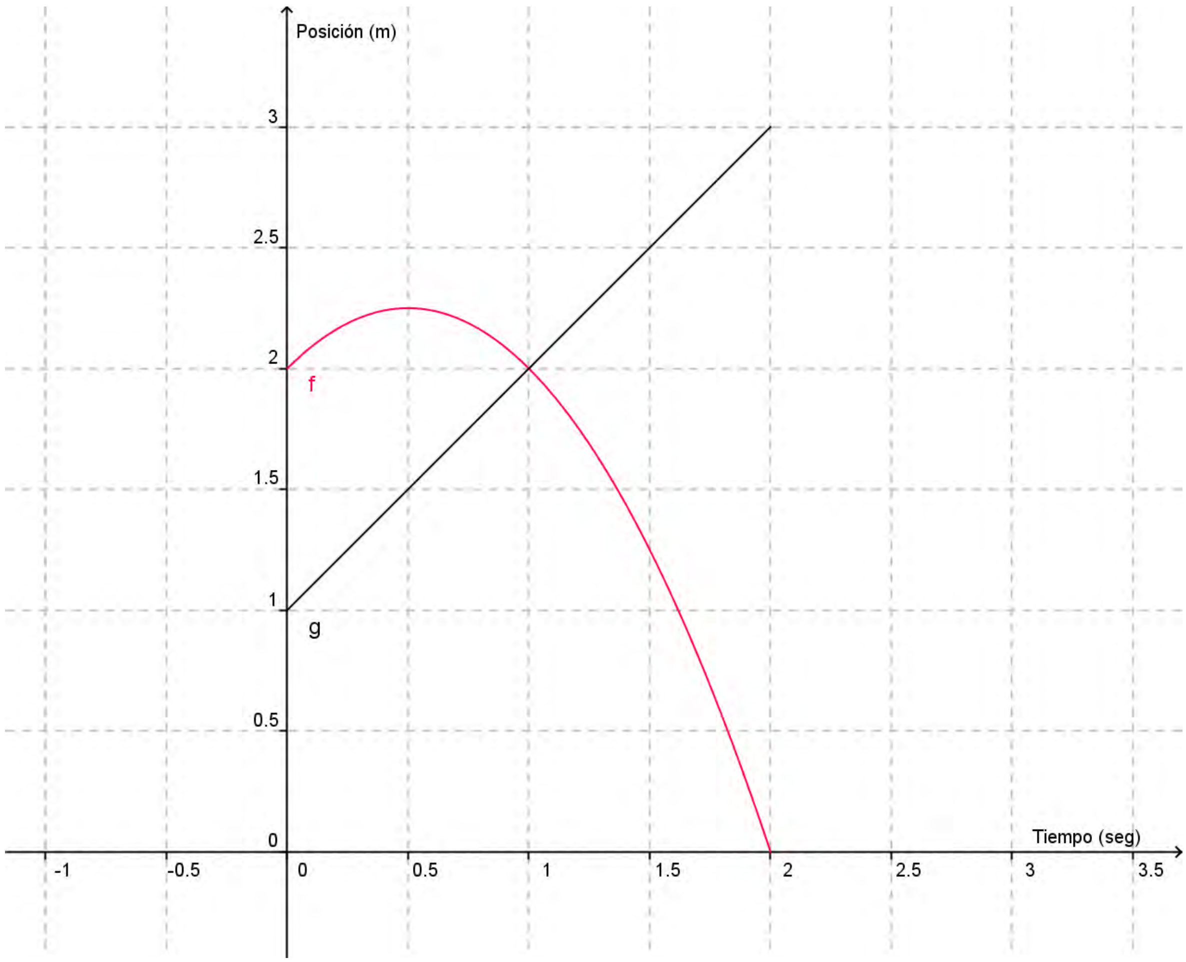
- La velocidad del primer auto fue mayor entre el minuto 30 y el minuto 40 (en el intervalo $[30,40]$), y también entre el minuto 60 y el minuto 75 (en el intervalo $[60,75]$). El valor de esta velocidad máxima es $\frac{40\ km-20\ km}{40\ min-30\ min} = \frac{80\ km-50\ km}{75\ min-60\ min} = 2\,\frac{km}{min}$.

Ejercicio 19: La gráfica que se muestra a continuación, ilustra la distancia recorrida por Carlos y Enrique en un entrenamiento de atletismo (la distancia recorrida por Carlos está representada por la línea quebrada d, y la distancia recorrida por Enrique está representada por la línea a).



- ¿En qué instante salió cada atleta?
- ¿Quién tardó más tiempo en realizar el recorrido? ¿Cuál auto llegó primero?
- ¿En qué intervalo fue mayor la velocidad de Carlos?
- ¿Cuál fue la velocidad promedio de Enrique?

Ejercicio 20: La gráfica muestra la posición de dos cuerpos que se mueven sobre la misma línea recta en el intervalo de tiempo $[0,2]$ (la gráfica f corresponde al cuerpo 1, y la gráfica g corresponde al cuerpo 2).



- ¿Cuál es la posición del cuerpo 2, cuando han transcurrido 1.5 segundos? ¿Cuál es la posición del cuerpo 1, cuando han transcurrido 2 segundos?
- ¿En qué instante la posición del cuerpo 1 es $2\ m$? ¿En qué instante la posición del cuerpo 2 es $1.5\ m$?
- ¿Cuándo la posición del cuerpo 2 es mayor que $1.5\ m$? ¿Cuándo la posición del cuerpo 1 es menor que $2\ m$?
- ¿Cuándo la posición del cuerpo 1 es menor que la posición del cuerpo 2? ¿Cuándo la posición de los dos cuerpos es la misma?
- ¿Cuál fue el aumento de posición del cuerpo 2 en el intervalo de tiempo $[0.5,2]$?
- ¿Cuál fue la velocidad media del cuerpo 1 en el intervalo de tiempo $[0,2]$?

Anexo 3. Algunos problemas en que intervienen funciones.

UNIVERSIDAD ICESI.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

Curso de Álgebra y funciones

Material preparado por Carlos A Quintero.

Sesión # 18: ALGUNOS PROBLEMAS EN QUE INTERVIENEN FUNCIONES

Existen muchos problemas en los cuales está presente el concepto de función. A continuación de proponen algunos a manera de ejemplos y otros a manera de ejercicios.

Ejemplo 12: Se quiere cercar con una malla de alambre un jardín de forma cuadrada.

- ¿Cuántos metros de malla son necesarios si el lado del jardín mide $12\,metros$? ¿Si mide $7\,metros$? ¿Si mide $33{,}5\,metros$?
- Construya una tabla con los datos anteriores, y añada otros.
- ¿Qué propiedad cumplen los pares de valores de la tabla?
- Sitúe en una gráfica los datos de la tabla. ¿Cómo quedan los puntos?
- Si se han utilizado $108\,metros$ de malla, ¿Qué dimensiones tenía el jardín?
- Explique cómo se hallan los metros de malla necesarios, si se conoce la longitud del lado del jardín.
- Escriba una fórmula que permita obtener los metros de malla necesarios para cercar un jardín de $x\,metros$ de lado.
- La fórmula que permite obtener los metros de malla necesarios para cercar el jardín, en términos de la longitud de su lado, ¿Define una función del intervalo $(0,\infty)$ en el conjunto de los números reales? Explique.

Solución:

- Si el lado del jardín mide $12\,metros$, se requieren $4(12\,metros) = 48\,metros$ para cercar el jardín. Si el lado del jardín mide $7\,metros$, se requieren $4(7\,metros) = 28\,metros$ para cercar el jardín. Si el lado del jardín mide $33{,}5\,metros$, se requieren $4(33{,}5\,metros) = 134\,metros$ para cercar el jardín.
-

longitud del lado (en m)	7	12	$33{,}5$	$\frac{13}{3}$	$\sqrt{2}$
metros de malla necesarios	28	48	134	$\frac{52}{3}$	$4\sqrt{2}$

- El cociente de cada par de valores asociados de la tabla, es constante.
- Los puntos quedan en línea recta (hacer la gráfica).
- Si se utilizaron $108\,metros$ de malla, la longitud del lado del jardín es $27metros$. ¿Por qué?
- Los metros de malla necesarios para cercar el jardín, se hallan multiplicando la longitud del lado por cuatro.

- Si la variable y representa el número de metros necesarios para cercar el jardín, entonces $y = 4x$.
- La fórmula $y = 4x$ define una función del intervalo $(0, \infty)$ en el conjunto de los números reales, porque para cada valor de x en el intervalo $(0, \infty)$ existe un valor de y asignado, y este valor de y es único (el cuádruplo de un número real es único).

Ejercicio 21: Un grupo de personas quiere comprar un balón que cuesta $3500\,u.m$ (unidades monetarias), aportando cantidades iguales.

- ¿Cuánto pagará cada uno, si son 10 personas? ¿Y si son 25?
- Construya una tabla con los datos anteriores, que muestre lo que debe pagar cada uno según el número de personas, y añada otros pares de valores.
- ¿Qué propiedad cumplen los pares de valores de la tabla?
- Sitúe en una gráfica los datos de la tabla.
- Si el número de personas es x, y lo que paga cada uno es y, escriba una fórmula que exprese esta situación.

Ejercicio 22: Un globo sonda lleva incorporado un termómetro para medir la temperatura a distintas alturas. Si x denota la altura del globo en metros sobre el nivel del mar, e y la temperatura en grados centígrados a dicha altura, entonces la fórmula $y = -\frac{1}{200}x + 10$ proporciona la temperatura a x metros de altura.

- ¿Qué temperatura marcará el termómetro al nivel del mar? ¿Y a $200\,metros$ de altura?
- ¿A cuántos metros de altura la temperatura es de 0℃? ¿Cada cuántos metros la temperatura disminuye 1℃?
- Construya una tabla con los datos anteriores que permita obtener la temperatura para cada altura. Sitúe los valores de la tabla en una gráfica cartesiana.

Ejercicio 23: El costo de una ventana cuadrada depende de su tamaño. El precio del cristal es de $50\,u.m$ (unidades monetarias) por dm^2 (decímetro cuadrado), y el del marco es $100\,u.m$ por dm (decímetro).

- ¿Cuánto costará una ventana de $7\ dm$ de lado? ¿Y de $1\ metro$ de lado?
- Construya una tabla para los datos anteriores y otros que elija, que muestre el costo según la longitud del lado de la ventana.
- Sitúe los valores de la tabla anterior en una gráfica cartesiana.
- Escriba una fórmula que permita obtener el costo de la ventana, si ésta tiene $x\ dm$ de lado.

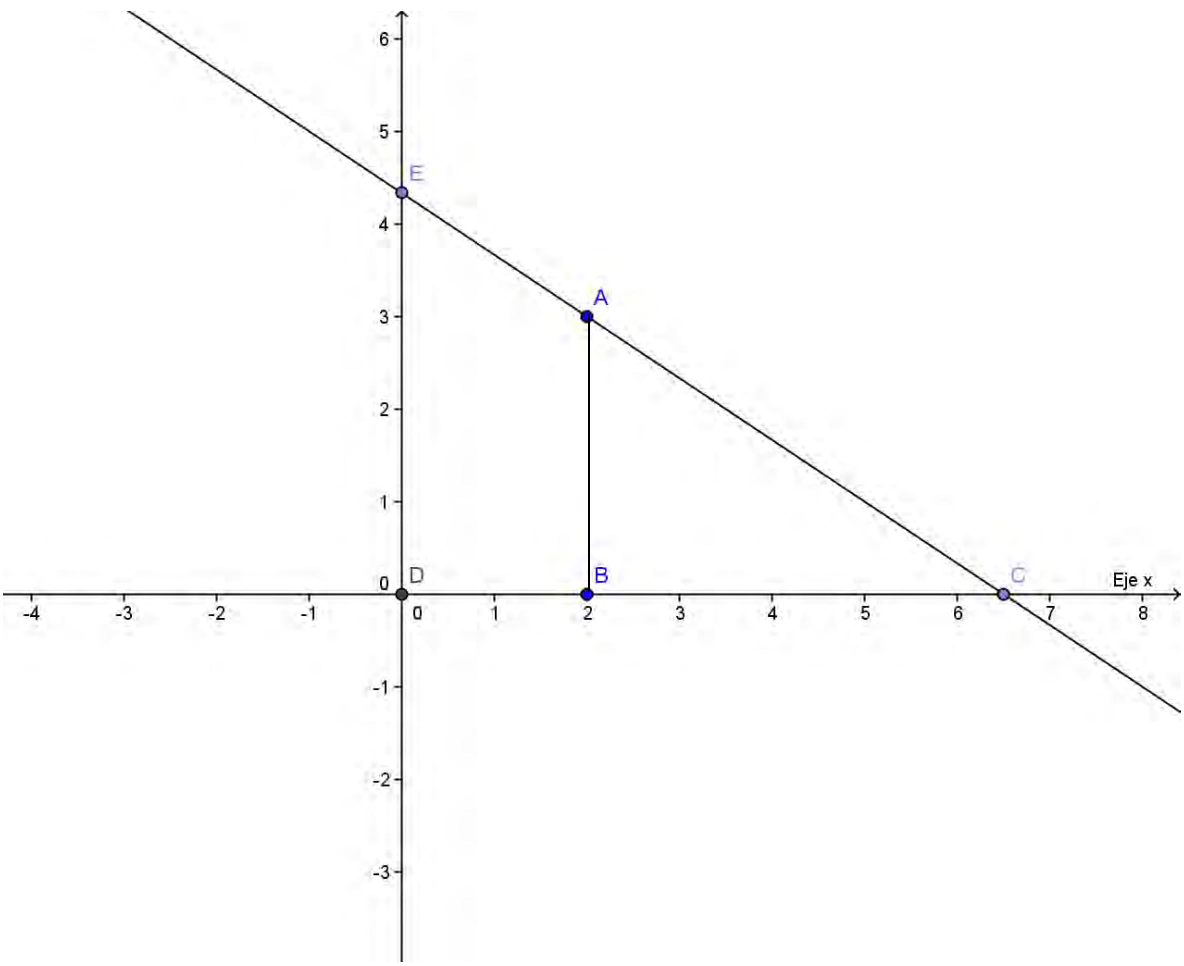
Ejercicio 24: Dos compañías alquilan fotocopiadoras. La primera cobra \$300.000 mensuales por el alquiler de la máquina, más $\$40$ por cada copia. La segunda cobra \$250.000 mensuales, más $\$60$ por cada copia.

- ¿Para qué número de copias el costo mensual será el mismo?
- Si usted lo requiriera, ¿Cuál compañía escogería?

En muchos problemas hay una variable que depende de otras dos y cuya solución requiere expresar la variable dependiente en función de una sola de las variables independientes. Este objetivo se alcanza encontrando una relación entre las dos variables independientes.

Cuando se tiene la variable dependiente en función de una sola variable independiente, es necesario establecer qué valores puede tomar esta variable, es decir, cuál es el dominio admisible de la función de una sola variable.

Ejemplo 13: Un triángulo rectángulo que tiene el vértice del ángulo recto en el origen de coordenadas y sus catetos sobre los ejes x e y, se forma en el primer cuadrante mediante una recta variable que pasa por el punto $(2,3)$, como se muestra en la siguiente figura:



- Escriba el área A del triángulo en función de la longitud de la base x, y halle el dominio de la función $A(x)$.
- Escriba el área A del triángulo en función de la longitud de la altura y, y halle el dominio de la función $A(y)$.

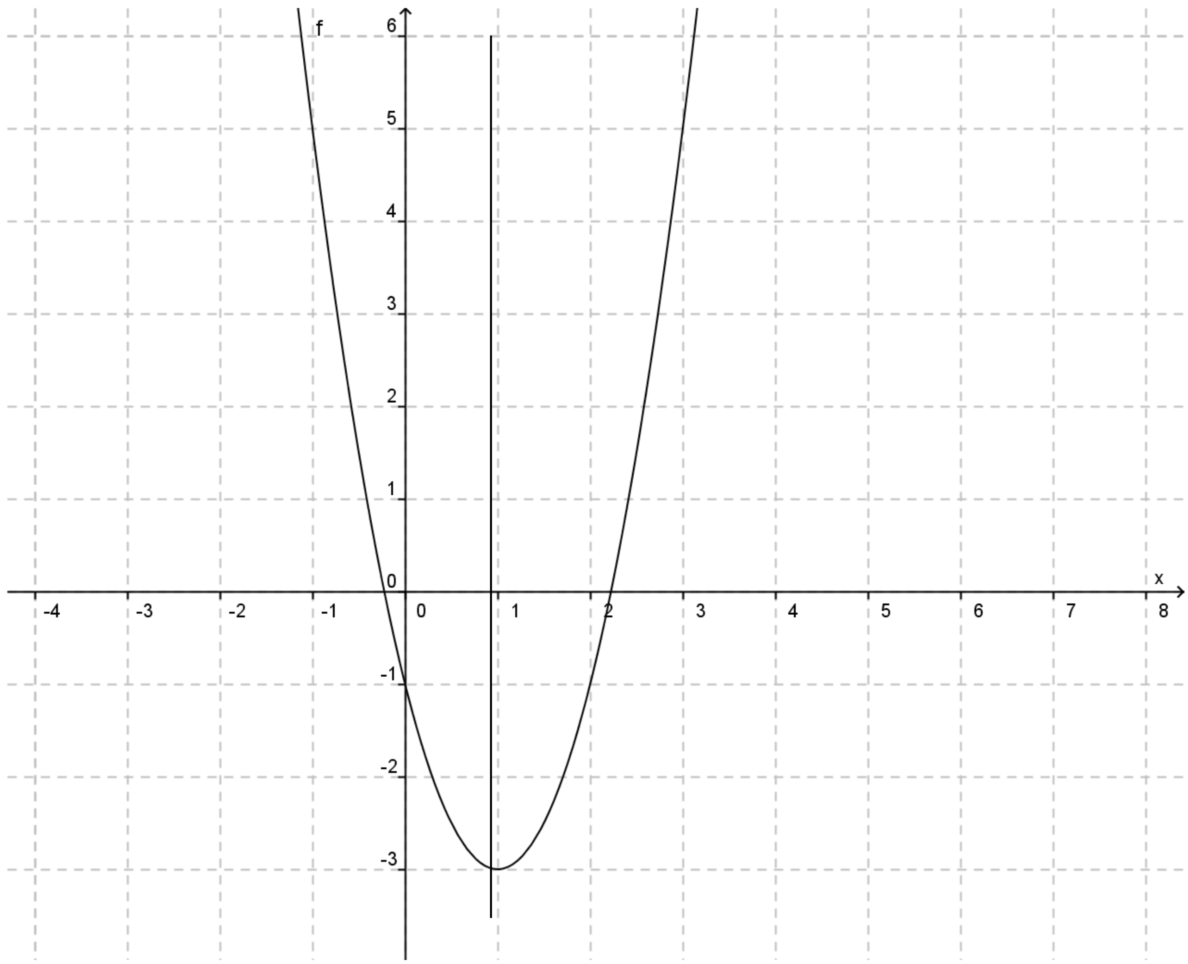
Solución:

- El área A del triángulo en consideración es $A = \frac{xy}{2}$. Además los triángulos DCE y BCA son semejantes, entonces la altura del triángulo DCE es a la altura del triángulo BCA, como la base del triángulo DCE es a la base del triángulo BCA, es decir, $\frac{y}{3} = \frac{x}{x-2}$. Así que $y = \frac{3x}{x-2}$. Por lo tanto, el área A del triángulo en función de la base x es $A(x) = \frac{3x^2}{2(x-2)}$. Para que se forme el triángulo con las condiciones requeridas, la variable x debe ser mayor que 2. Así que el dominio de la función $A(x)$ es el intervalo $(2, \infty)$.
- Como $\frac{y}{3} = \frac{x}{x-2}$, entonces al despejar la variable x se obtiene $x = \frac{2y}{y-3}$ (verifíquelo). Así que el área A del triángulo en función de la altura y es $A(y) = \frac{y^2}{y-3}$. Para que se forme el triángulo con las condiciones requeridas, la variable y debe ser mayor que tres. Así que el dominio de la función $A(y)$ es el intervalo $(3, \infty)$.

Ejercicio 25: Se va a construir una caja abierta, a partir de una pieza cuadrada de cartón de $6\, pulgadas$ de lado, cortando cuadrados iguales de lado x de las esquinas y doblando los bordes.

- Escriba el volumen V de la caja en función de x.
- Halle el dominio de la función $V(x)$.

Considere la función de variable real, definida por la fórmula $f(x) = 2x^2 - 4x - 1$. Como $2x^2 - 4x - 1 = 2(x^2 - 2x) - 1 = 2[(x^2 - 2x + 1) - 1] - 1 = 2(x-1)^2 - 3$, y el valor mínimo que toma el término $2(x-1)^2$ es cero ¿Por qué? entonces el valor mínimo de la función es $f(1) = -3$. Al representar los puntos $\big(2, f(2)\big), \big(0, f(0)\big), \big(3, f(3)\big)$ y $\big(-1, f(-1)\big)$, se obtiene la siguiente gráfica:



En la gráfica anterior se observa que la recta vertical que pasa por el punto $\left(1, f(1)\right) = (1, -3)$ es un eje de simetría de la gráfica de la función f. Esta gráfica se llama parábola y el punto $\left(1, f(1)\right)$ se denomina vértice de la parábola. Observe que la abscisa del vértice se obtiene de $\frac{-(-4)}{2(2)} = 1$.

Como los puntos de corte de la parábola con el eje x, tienen ordenada igual a cero y las coordenadas de dichos puntos deben satisfacer la ecuación de la parábola, entonces estos puntos de corte se obtienen resolviendo la ecuación cuadrática $2x^2 - 4x - 1 = 0$. Esta ecuación puede resolverse con la fórmula cuadrática, y se obtiene que $x = \frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4(2)(-1)}}{2(2)} = \frac{4\pm\sqrt{24}}{4} = \frac{4\pm2\sqrt{6}}{4} = \frac{2\pm\sqrt{6}}{2}$. Observe que estos no se pueden determinar a partir de la gráfica.

El corte con el eje y es el punto $\left(0, f(0)\right)$, es decir el punto $(0, -1)$.

Anexo 4. Función cuadrática. Funciones definidas a trozos.

UNIVERSIDAD ICESI.
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
Curso de Álgebra y funciones
Material preparado por Carlos A Quintero.

Sesión # 19: FUNCIÓN CUADRÁTICA. FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS

Definición 5: La función real de variable real, definida por la fórmula $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$, se llama **función cuadrática**.

La gráfica de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, se llama parábola. El vértice de esta parábola es el punto $\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$, y los "cortes" de la parábola con el eje x, se obtienen resolviendo la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, la cual se puede resolver con la fórmula cuadrática $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. ¿Qué sucede si $b^2 - 4ac < 0$? ¿Qué sucede si $b^2 - 4ac = 0$?, y ¿Qué sucede si $b^2 - 4ac > 0$?

Si en la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, el valor $a > 0$ (el coeficiente principal es positivo), entonces la parábola abre hacia arriba, y si el valor $a < 0$, entonces la parábola abre hacia abajo.

Ejemplo 14: Considere la función real de variable real, definida por la fórmula $f(x) = -3x^2 - 6x - 1$.

- Halle el vértice de la gráfica de f.
- Determine los puntos de corte de la gráfica de f, con el eje x.
- Determine el punto de corte de la gráfica de f, con el eje y.
- Construya la gráfica de f.

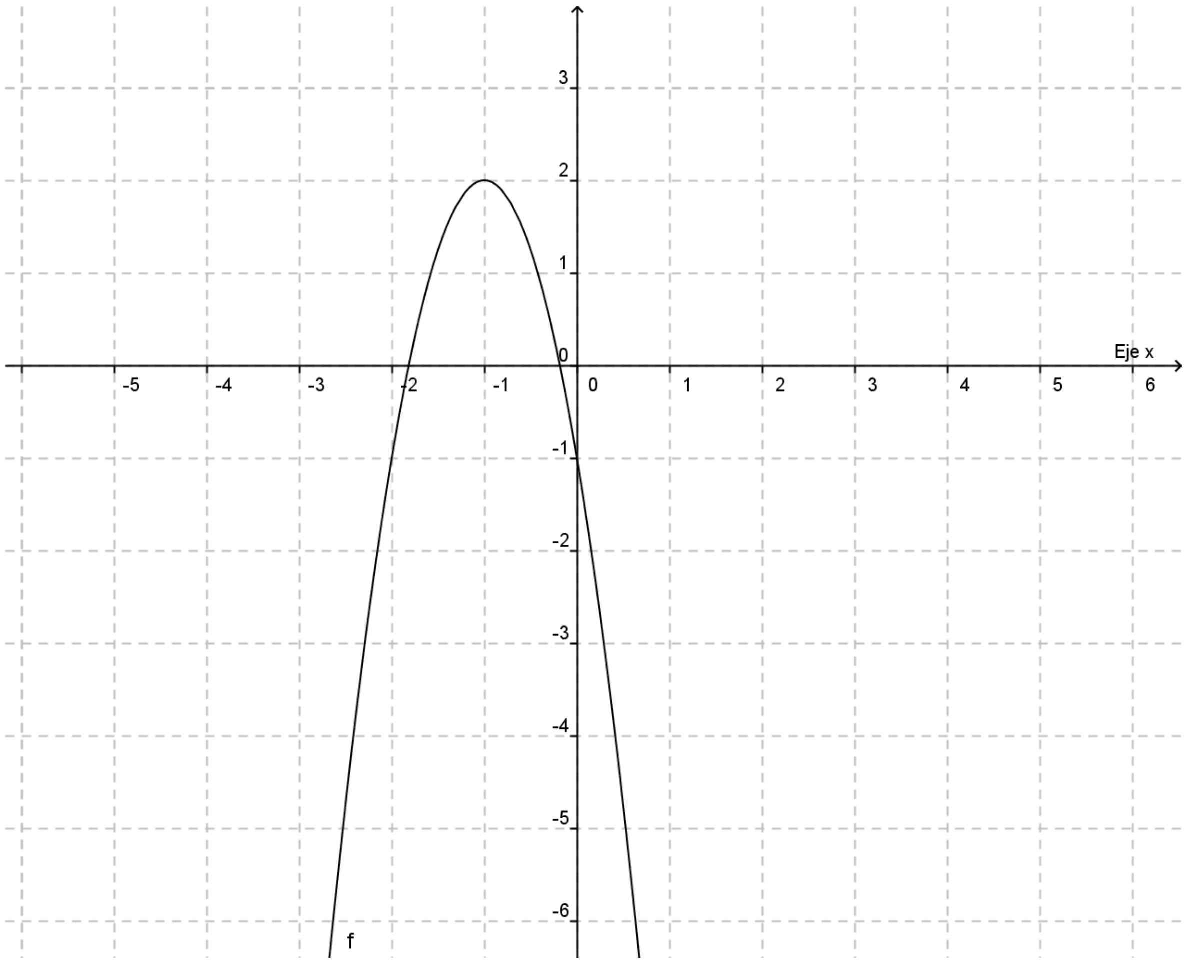
Solución:

- En este caso $a = -3$, $b = -6$ y $c = -1$ Así que la abscisa del vértice es $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2(-3)} = \frac{6}{-6} = -1$, y la ordenada es $f\left(\frac{-b}{2a}\right) = f(-1) = 2$. Por lo tanto el vértice es el punto $V(-1,2)$.

- Las abscisas de los puntos de corte de la gráfica con el eje x son: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{36-12}}{-6} = \frac{6 \pm 2\sqrt{6}}{-6} = \frac{-3 \mp \sqrt{6}}{3}$. Por lo tanto los puntos de corte de la gráfica de f con el eje x son $\left(\frac{-3-\sqrt{6}}{3}, 0\right)$ y $\left(\frac{-3+\sqrt{6}}{3}, 0\right)$.

- Como $f(0) = -1$, entonces el punto de corte de la gráfica de f con el eje y es $(0, -1)$.

- La gráfica de la función f es:



Ejercicio 26: Considere la función real de variable real, definida por la fórmula $f(x) = 4x^2 - 12x + 10$.

- Halle el vértice de la gráfica de f.
- Determine “los puntos de corte” de la gráfica de f, con el eje x.
- Determine el punto de corte de la gráfica de f, con el eje y.
- Construya la gráfica de f.

Ejercicio 27: Considere la parábola de ecuación $y = -x^2 + 4$.

- Escriba la fórmula que permite obtener la distancia d de un punto cualquiera $P(x, y)$ de la parábola, al punto $(0,2)$.
- Escriba la fórmula que permite obtener la distancia d en función de x, y encuentre el dominio de la función definida por esta fórmula.
- Escriba la fórmula que permite obtener la distancia d en función de y, y encuentre el dominio de la función definida por esta fórmula.

FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS

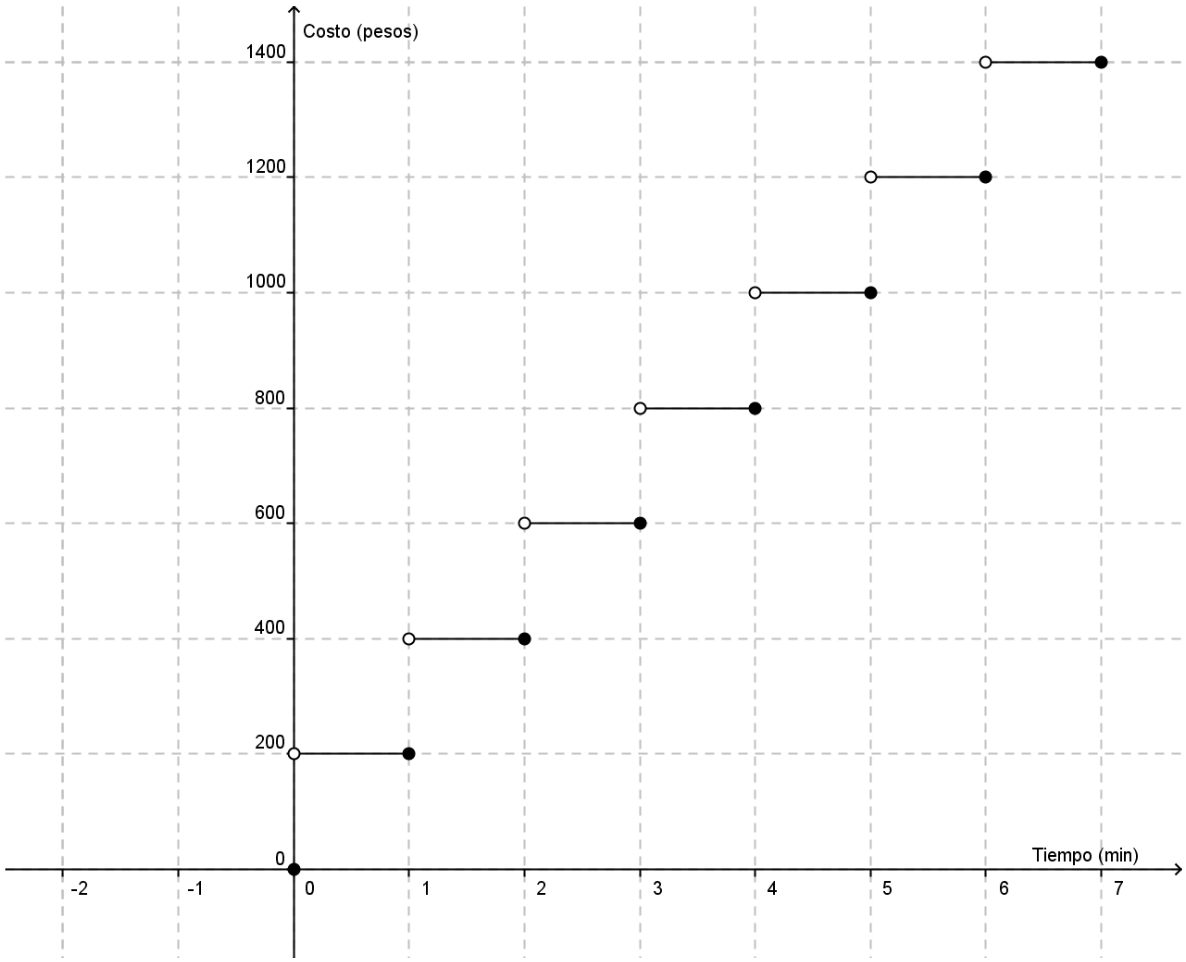
En muchas ocasiones se trabaja con funciones definidas a trozos (o por partes). Un caso bien conocido es el de la función $f(x) = |x|$, que está definida de una manera para $x \geq 0$ y de otra para $x < 0$. Estas funciones son frecuentes en la vida diaria, como se ve en el ejemplo siguiente:

Ejemplo 15: En una cabina telefónica, el costo de una llamada a un celular depende de su duración. Por un minuto, o fracción de minuto, se pagan $\$200$.

- Escriba la fórmula que define la función costo.
- Haga la gráfica de la función costo.

Solución:

- Por cero minutos se paga $\$0$, En el intervalo de tiempo $(0,1]$ (minutos) se paga $\$200\text{x}1$, en el intervalo de tiempo $(1,2]$ (minutos) se paga $\$200\text{x}2$ y en el intervalo de tiempo $(n-1, n]$ (minutos) se paga $\$200\text{x}\, n$ (n es un número natural). Por lo tanto la función de costo C, del intervalo de tiempo $[0,\infty)$ (en minutos) en el conjunto de los números reales, está definida por la fórmula: $C(t) = \begin{cases} 0, si\ t = 0 \\ 200n, si\ n-1 < t \leq n \end{cases}$, donde n es cualquier número natural.
- La gráfica de la función costo es:



La función costo del ejemplo anterior es un ejemplo de función definida a trozos.

Ejercicio 28: Considere la función real de variable real definida por la fórmula:

$$f(x)=\begin{cases} 2, si\ x\leq -1 \\ x^2-1, si -1<x\leq 2 \\ -2x+5, si\ x>2 \end{cases}$$

- Determine el dominio de la función f.
- Determine el rango de la función f.
- Construya la gráfica de f.

Anexo 5. Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas.

UNIVERSIDAD ICESI.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

Curso de Álgebra y funciones

Material preparado por Carlos A Quintero.

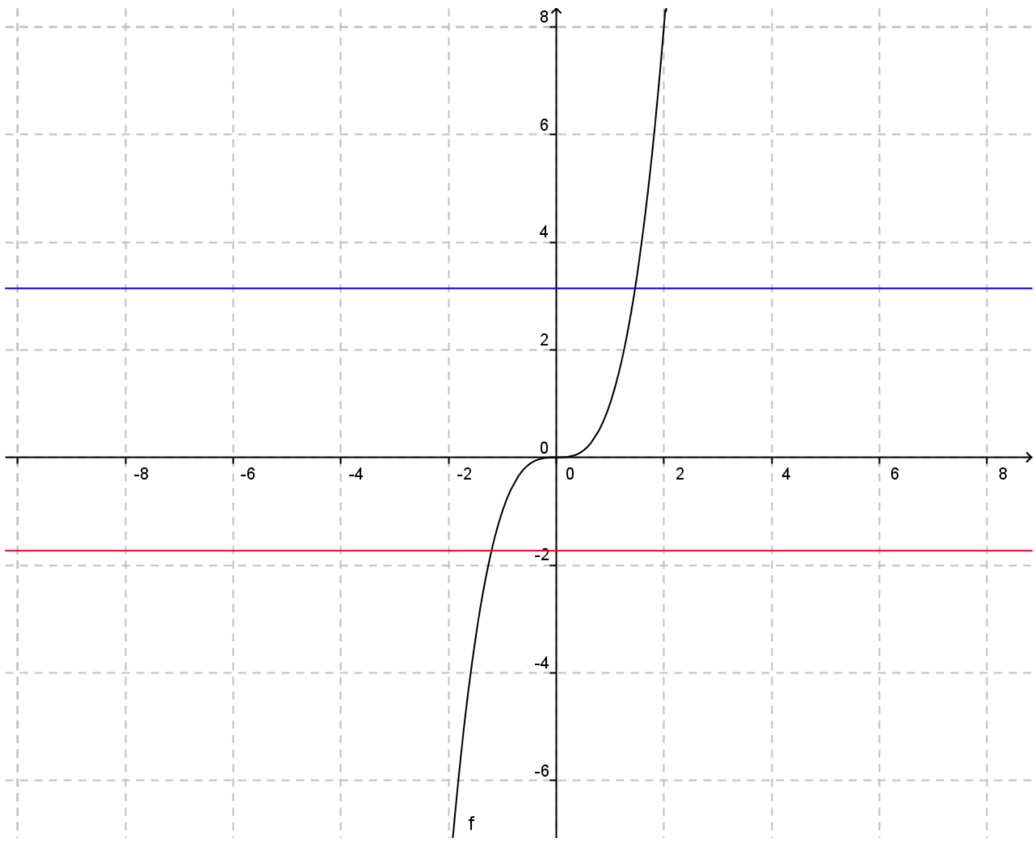
Sesión # 20: FUNCIONES INYECTIVAS, SOBREYECTIVAS Y BIYECTIVAS

Ejemplo 16: Considere la función real de variable real definida por la ecuación $f(x) = x^3$.

- ¿Existen dos o más valores de x que tengan la misma imagen?
- Encuentre cinco puntos de la gráfica de f.
- Construya la gráfica de f.
- ¿Es posible trazar una línea recta horizontal que corte la gráfica de f en dos o más puntos?

Solución:

- Si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $(x_1)^3 = (x_2)^3$ y, por lo tanto, $x_1 = x_2$ decir, si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $x_1 = x_2$, o sea que no existen dos o más valores de x que tengan la misma imagen.
- Como $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 8$, $f(-1) = -1$, y $f(-2) = -8$, entonces cinco puntos de la gráfica de f son: $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,8)$, $(-1,-1)$, y $(-2,-8)$.
- La gráfica de f se presenta a continuación.



- De la gráfica se concluye que toda recta horizontal corta a la gráfica de f en un solo punto (se representaron dos de estas rectas). Por lo tanto no existe una recta horizontal que corte la gráfica de f en dos o más puntos.

Definición 6: Una función f es **inyectiva** (o uno a uno) si a cada par de elementos distintos del dominio de f, le corresponden imágenes distintas en su rango, es decir, si $x_1 \neq x_2$ implica que $f(x_1) \neq f(x_2)$ o, lo que es equivalente, si $f(x_1) = f(x_2)$ implica que $x_1 = x_2$ (Curso de lógica y argumentación: (p⇒q) ≡(¬q⇒¬p)).

La función f del ejemplo anterior es inyectiva ¿Por qué?

El hecho de que $x_1 \neq x_2$ implique que $f(x_1) \neq f(x_2)$, significa que no es posible trazar una recta horizontal que corte a la gráfica de f en dos o más puntos; de ser posible esto, existirían dos elementos distintos del dominio con la misma imagen.

Por lo tanto, disponemos de un criterio gráfico: una función real de variable real es inyectiva si, y solo si, no existe una recta horizontal que corte la gráfica en más de un punto. Este criterio se conoce como “la prueba de la recta horizontal”.

Tan importante como establecer si una función es inyectiva es establecer que una función no lo es. En este caso, una alternativa al criterio gráfico es el siguiente: si existen dos valores distintos en el dominio, $x_1 \neq x_2$ que tienen la misma imagen, es decir, tales que $f(x_1) = f(x_2)$ entonces la función NO es inyectiva.

Por ejemplo, es fácil ver que $f(x) = 2x^2 + 5$ no es inyectiva, pues el exponente par en x^2 ya nos dice que, por ejemplo, $f(-2) = f(2)$.

Ejercicio 29: Considere la función f, del conjunto formado por los estudiantes del grupo 4 de Álgebra y Funciones, en el conjunto de los números naturales, definida por la fórmula $f(x) = Número\ de\ lista\ de\ x$. Determine si f es inyectiva. Justifique.

Pregunta: Si A y B son conjuntos finitos y $f: A \to B$ es una función, ¿Qué relación entre el número de elementos de A y el número de elementos de B garantiza que f no es inyectiva?

Considere la función f, de los reales en los reales, definida por la fórmula $f(x) = x^3$ (ver el ejemplo 14). El rango de la función f, es el conjunto de los números reales, es decir, el rango de f es igual a su codominio. Decimos que esta función es sobreyectiva, de acuerdo con la siguiente definición:

Definición 7: Una función f de un conjunto A en un conjunto B es **sobreyectiva,** si el rango de f es igual al conjunto B, es decir, si su codominio y rango son iguales.

Ejercicio 30: Determine si la función del ejercicio 26 es sobreyectiva. Explique. ¿Es inyectiva? Explique.

Ejercicio 31: Considere la función f, de los reales en los reales, definida por la fórmula $f(x) = x^2$.

- Determine si f es inyectiva. Explique.
- Determine si f es sobreyectiva. Explique.

Es posible, a partir de una función f que no es sobreyectiva, obtener otra función g, definida por la misma regla que f y que sí es sobreyectiva, haciendo que su codominio sea igual al rango de f.

Ejemplo 17: Considere la función $f: R \to R$ definida por la fórmula $f(x) = |x|$.

- Demuestre que f no es sobreyectiva.
- ¿Cómo se puede obtener una función sobreyectiva a partir de f?

Solución:

- El codominio de f es el conjunto de los números reales, y su rango es el intervalo $[0,\infty)$. Como el codominio y el rango de la función f no son iguales, entonces la función no es sobreyectiva.
- La función $g: R \to [0,\infty)$ definida por $g(x) = |x|$ es una función sobreyectiva; se ha tomado como codominio el rango de la función f.

Definición 8: Una función f de un conjunto A en un conjunto B es **biyectiva**, si y sólo si es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

La función de los reales en los reales, definida por la fórmula $f(x) = x^3$ es biyectiva, porque es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

Ejemplo 18: Considere la función f del conjunto formado por los estudiantes de su grupo de Álgebra y funciones, en el conjunto N de los números naturales, definida por la fórmula $f(x) = número\ de\ lista\ del\ estudiante\ x$.

- Considere una regla g que le asigna al número natural n el apellido del estudiante cuyo número de lista es n. ¿Es esta regla una función de N , el conjunto de los números naturales, en el conjunto formado por los estudiantes de su grupo de Álgebra y funciones?
- Ahora, considere la regla h que le asigna a cada número t en el rango de la función f el apellido del estudiante cuyo número de lista es t, es decir, $h(t) =$ estudiante cuyo número de lista es t, con t en el rango de f. ¿Define esta regla una función? ¿Qué relación hay entre las reglas f y h?

Solución:

- La regla $g(n) = estudiante\ cuyo\ número\ de\ lista\ es\ n$, no es una función ya que, por ejemplo, el número 50 no tiene imagen ¿Por qué?
- La regla h, en cambio, define una función ya que a cada elemento n del rango de f, le corresponde una y solo una imagen $h(n)$ en el conjunto formado por los estudiantes de este grupo. La función h "invierte" el efecto de la función f.

Anexo 6. El concepto de función inversa.

UNIVERSIDAD ICESI.
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
Curso de Álgebra y funciones
Material preparado por Carlos A Quintero.

Sesión # 21: EL CONCEPTO DE FUNCIÓN INVERSA

Ejemplo 19: Considere el conjunto $A = \{Ana, Jaime, Jos\ \ , Luisa, Mar\ a\}$, y suponga que Ana, José y María tienen 17 años, y que Jaime y Luisa tienen 20 años, y considere la función f del conjunto A en los números naturales, definida por $f(x) = edad\ de\ x, en\ a\ \ os\ cumplidos$.

- Determine si la regla *g* que asigna al número natural n el elemento $g(n) =$ *elemento de A cuya edad en años cumplidos es n,* es una función.

- Determine si la regla h definida sobre el rango de f como, $h(n) =$ *elemento de A cuya edad en años cumplidos es n,* es una función.

Solución:

- La regla g no es una función, porque, por ejemplo, $g(10)$ no existe, con lo cual se viola una de las condiciones para que una regla de asignación sea función. Por otra parte, esta regla asigna a 17 tres imágenes: Ana, José y María, lo cual viola la segunda condición del concepto de función.
- En cuanto a la regla h, aunque por estar definida sobre el rango de f cada elemento tiene imagen, en el caso de 17 la imagen es múltiple, como se dijo antes: Ana, José y María.

Supongamos que la función f definida como $y = f(x)$ es inyectiva en su dominio D, y supongamos que su rango es B. En estas circunstancias, existe una función que denotaremos como f^{-1} y que llamaremos la función inversa de f, con esta característica: Si $f(x) = y$, entonces $f^{-1}(y) = x$, en otras palabras, la función f^{-1} revierte o deshace el efecto de la función f. Antes de considerar un ejemplo, veamos por qué en las circunstancias mencionadas existe la función inversa $f^{-1}: B \to A$.

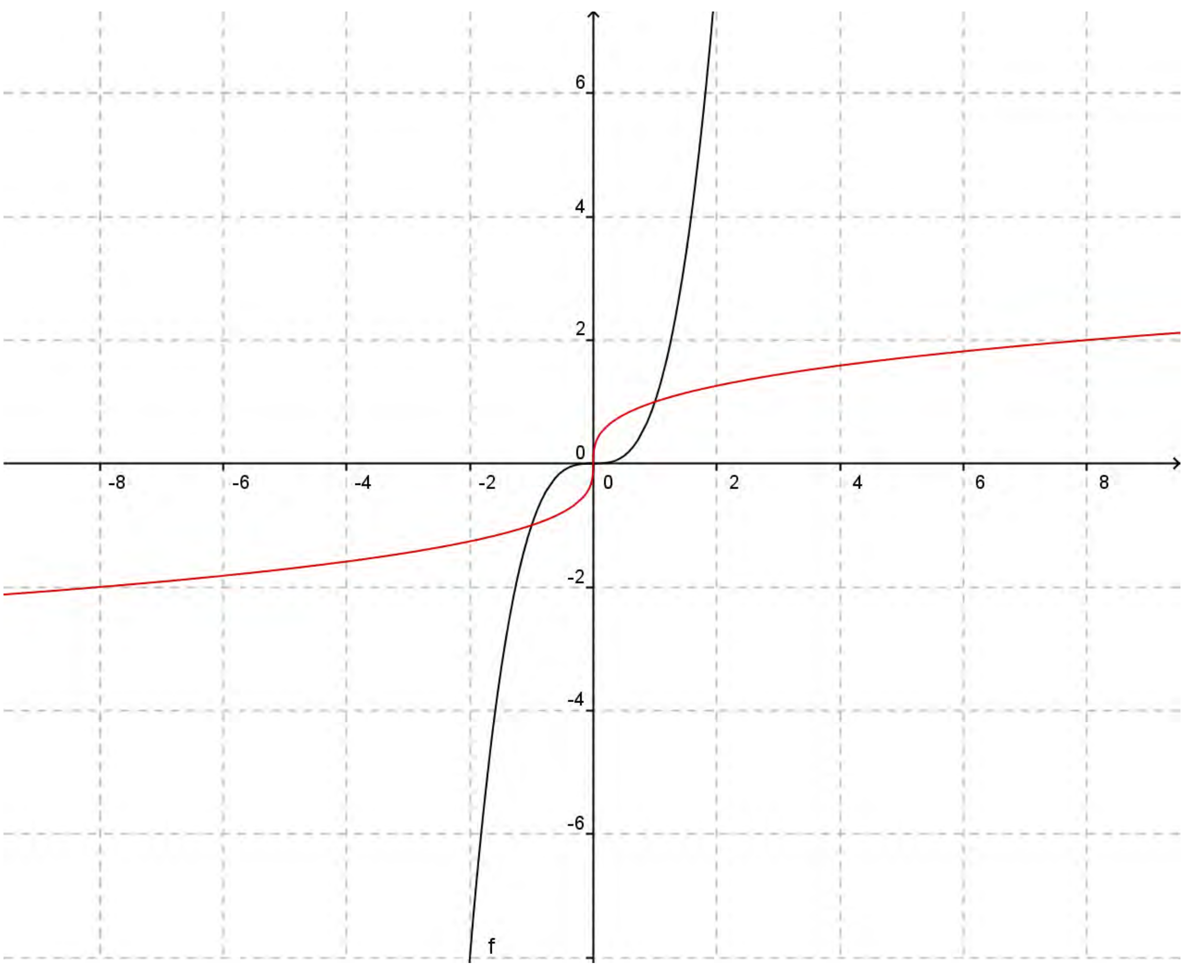
En primer lugar, si y es un elemento cualquiera de B entonces y es imagen, mediante f, de algún x de A, porque B es el rango de f. En segundo lugar, éste x es único, porque no hay dos elementos distintos en A que tengan una misma imagen puesto que f es inyectiva. Ahora es fácil definir f^{-1} así: $f^{-1}(y) = x$ si $f(x) = y$. Tenemos entonces la siguiente definición:

Definición 9: Sea f una función inyectiva, de dominio A y rango B, y definida por la fórmula $f(x) = y$. La **función inversa de f**, denotada f^{-1}, de dominio B y rango A, es la función definida por la fórmula $f^{-1}(y) = x$ para todo y en el rango de f.

Ejemplo 20: Sean D el conjunto de departamentos de Colombia y C el conjunto de las ciudades capitales de departamento**.** Es claro que la función $f: D \to C$ definida por $f(x) =$ la capital de x, para cada departamento x, es inyectiva y su rango es C. Entonces existe la función inversa

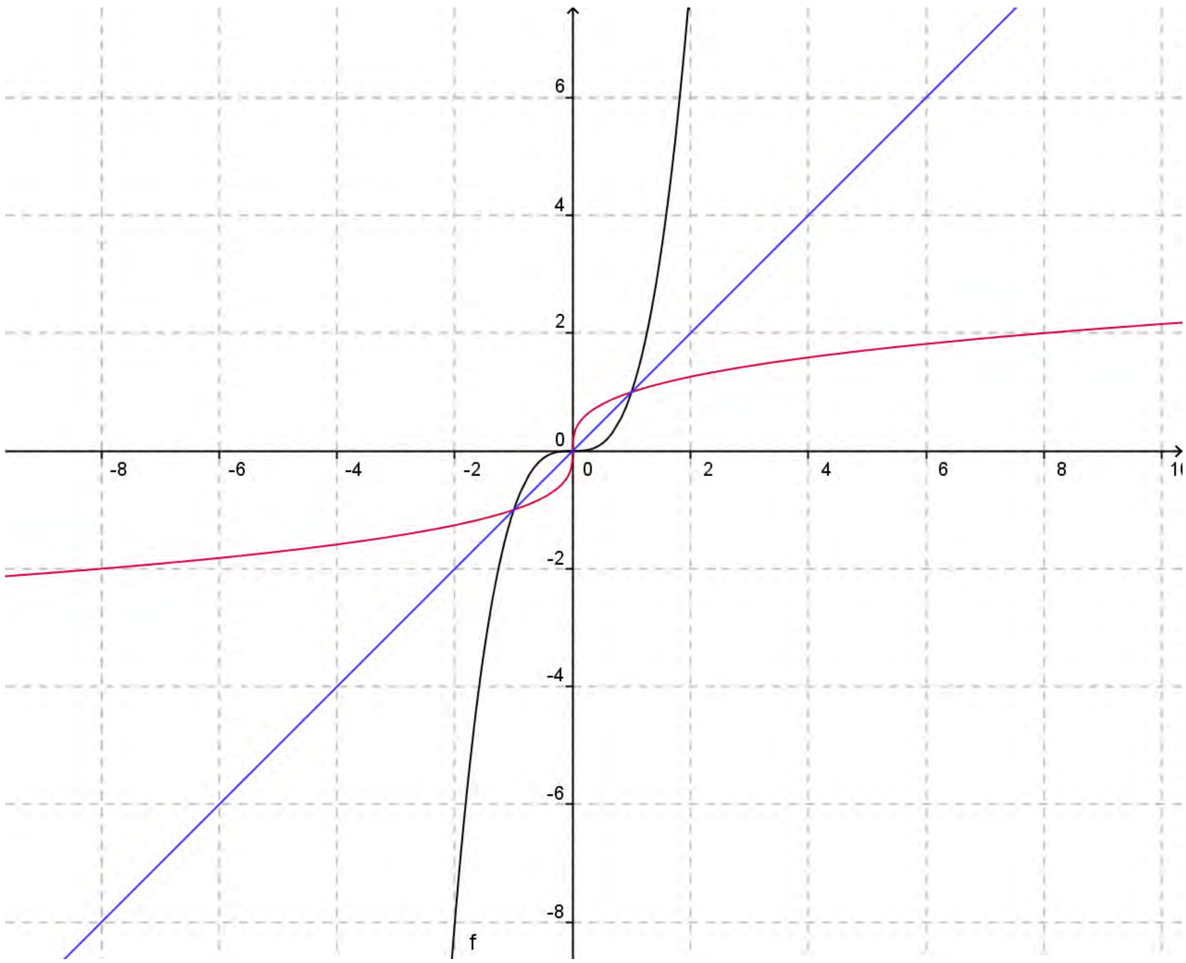
$f^{-1}: C \to D$ que está definida, para cada ciudad capital z, como $f^{-1}(z) = w$ si y sólo si w es el departamento cuya capital es z.

Ejemplo 21: La función real de variable real definida por la ecuación $y = f(x) = x^3$ es inyectiva (ver el ejemplo 16). Por lo tanto, tiene función inversa f^{-1}. Como el dominio de f = rango de f = al intervalo $(-\infty,\ \ )$, entonces $(-\infty,\ \ )$ es el dominio y el rango de f^{-1}. Pero ¿Cuál es la fórmula que define a la función f^{-1}? La respuesta es de esperar: si f es "elevar al cubo", y f^{-1} "deshace" el efecto de f, entonces f^{-1} será "sacar raíz cúbica". En efecto, para encontrar la fórmula que define a la función inversa f^{-1}, se despeja la variable x de la ecuación $y = x^3$. En este caso se obtiene $x = \sqrt[3]{y}$. Por último se hace un cambio de variable; la variable x se sustituye por la variable y, y la variable y se sustituye por la variable x. Con este cambio de variable se obtiene la ecuación $y = \sqrt[3]{x}$. Así que la fórmula que define a la función f^{-1} es $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$. Al graficar las funciones f y f^{-1}, se obtiene:



El hecho de que $f(x) = y$ si y solo si $f^{-1}(y) = x$, significa que el punto (x, y) pertenece a la gráfica de f si y solo si el punto (y, x) pertenece a la gráfica de f^{-1}. Por lo tanto la gráfica de f^{-1}, se puede obtener reflejando cada punto de la gráfica de f sobre la recta de ecuación $y = x$.

La siguiente gráfica ilustra que al reflejar cada punto de la gráfica de la función definida por la fórmula $f(x) = x^3$, sobre la recta de ecuación $y = x$, se obtiene un punto de la gráfica de la función definida por la fórmula $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$. En particular, al reflejar el punto $(-2, -8)$ de la gráfica de f sobre la recta de ecuación $y = x$, se obtiene el punto $(-8, -2)$ de la gráfica de f^{-1}.



Ejercicio 32: Considere la función real de variable real definida por la fórmula $y = f(x) = \frac{2x-5}{3x+1}$.

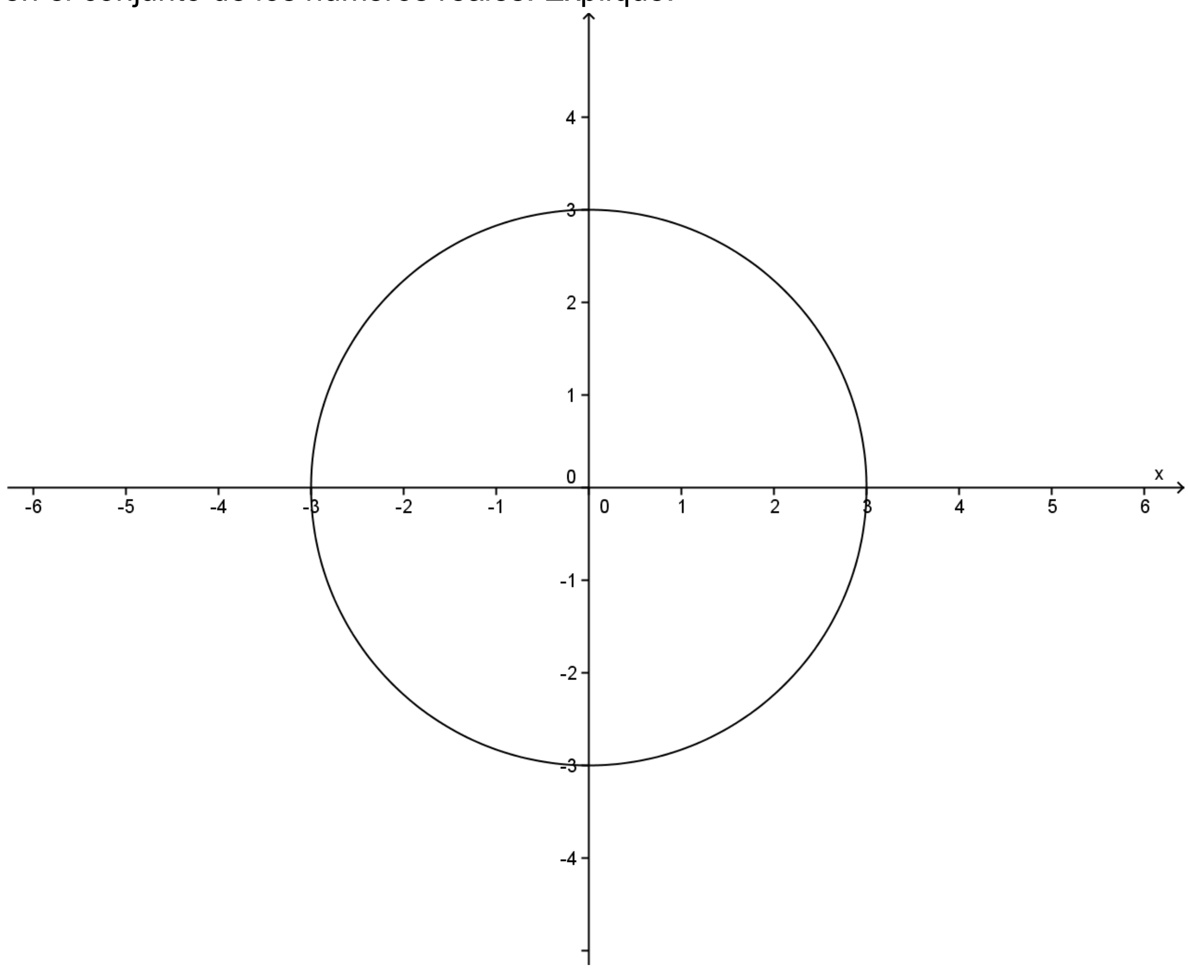
- Demuestre que si $f(a) = f(b)$, entonces $a = b$, es decir, demuestre que la función f es inyectiva.
- Encuentre la fórmula que define a la función f^{-1}.

Anexo 7. Prueba de entrada.

PRUEBA DE ENTRADA

1) Una función f está definida por la fórmula $f(x) = \sqrt{2x-1}$.
- **a)** Halle el dominio de f.
- **b)** Encuentre $f(x+3)$.
- **c)** Determine el par ordenado $\left(5, f(5)\right)$.

2) Determine si la siguiente gráfica corresponde a una función del intervalo $[-3,3]$ en el conjunto de los números reales. Explique.



3) Considere el conjunto $A = \{Luis, Enrique, María, Ana\}$. De los elementos de este conjunto se sabe que Luis y María tienen 17 años, y que Enrique y Ana tienen 19 años.
- **a)** Determine si la regla que asigna a cada elemento del conjunto A su edad, es una función del conjunto A en el conjunto N de los números naturales.

b) Determine si la regla que asigna a cada número del conjunto $B = \{17, 19\}$, un estudiante del conjunto A cuya edad sea dicho número (en años cumplidos), es una función.

4) Una pelota de goma se deja caer desde una altura de $70\,cm$. La altura alcanzada por esta pelota después de cada rebote, es el 80% de la altura alcanzada después del rebote inmediatamente anterior.

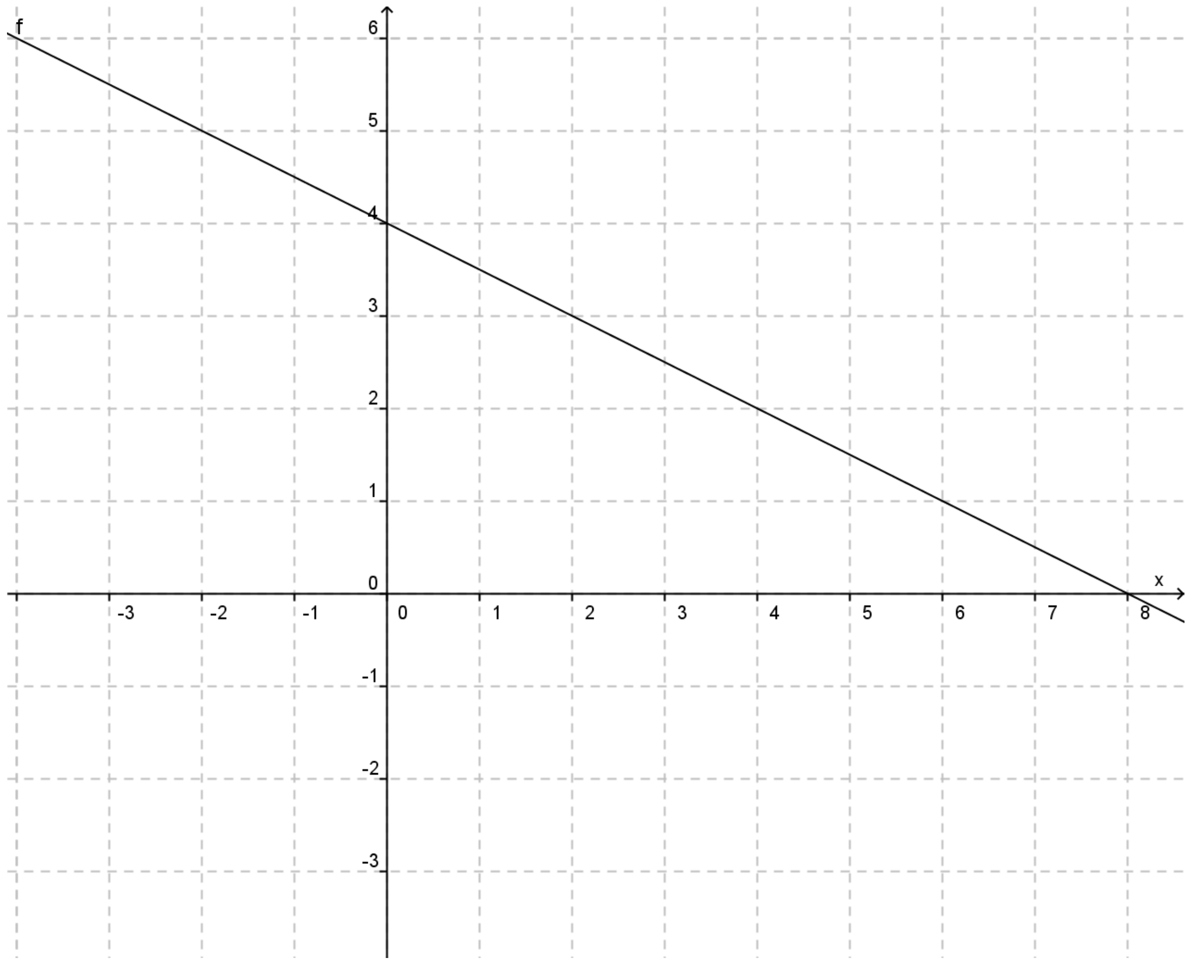
a) Complete la siguiente tabla:

Número de rebotes	0	1	2	3	n
Altura en cm	70	$\frac{80}{100}(70) = 56$			

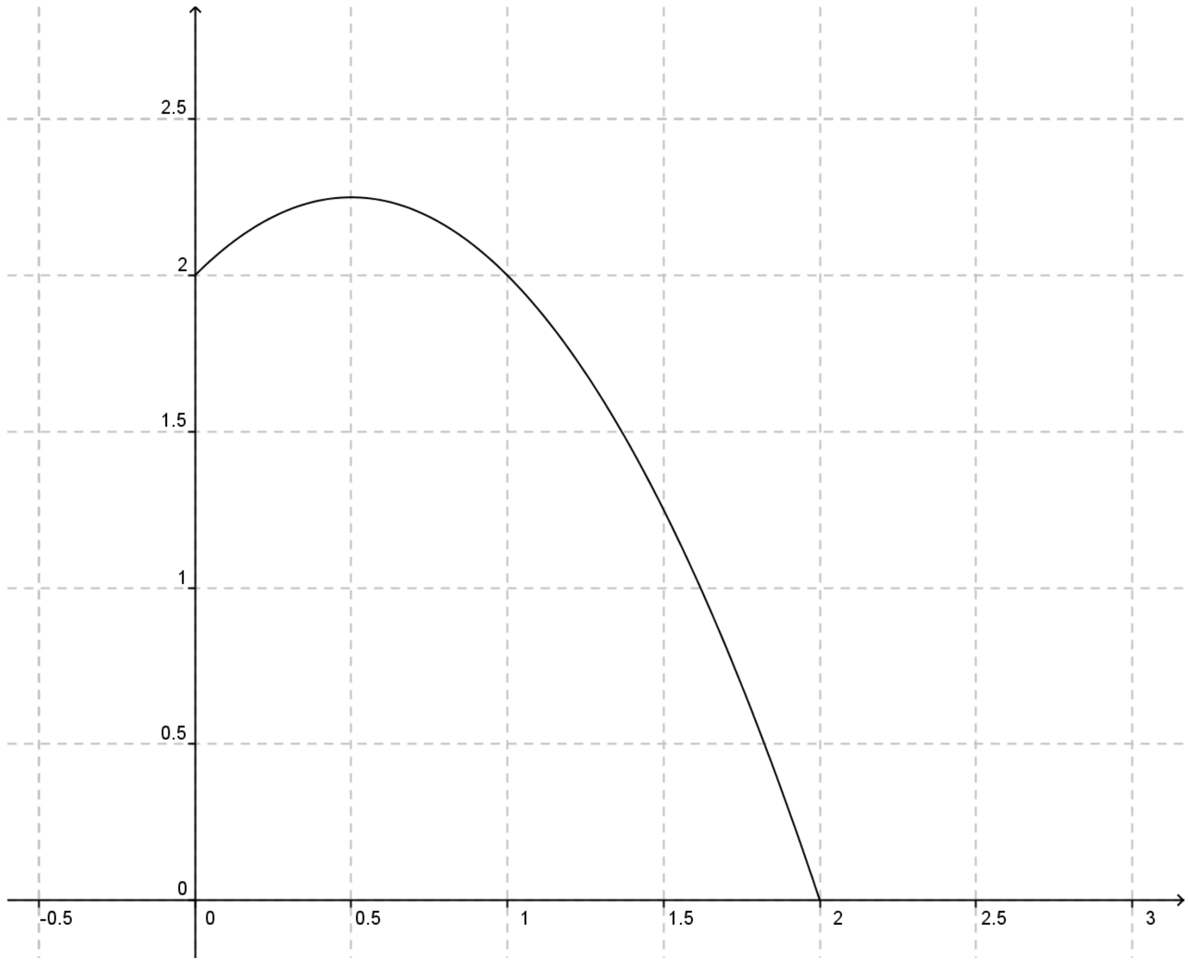
b) Escriba la fórmula que expresa la altura h en función del número de rebotes n.

5) Construya la gráfica de la función del conjunto de los números reales en el conjunto de los números reales, definida por la fórmula $y = f(x) = 4 - x^2$.

6) Escriba la fórmula que define a la función f del conjunto de los números reales en el conjunto de los números reales, si su gráfica es la siguiente:



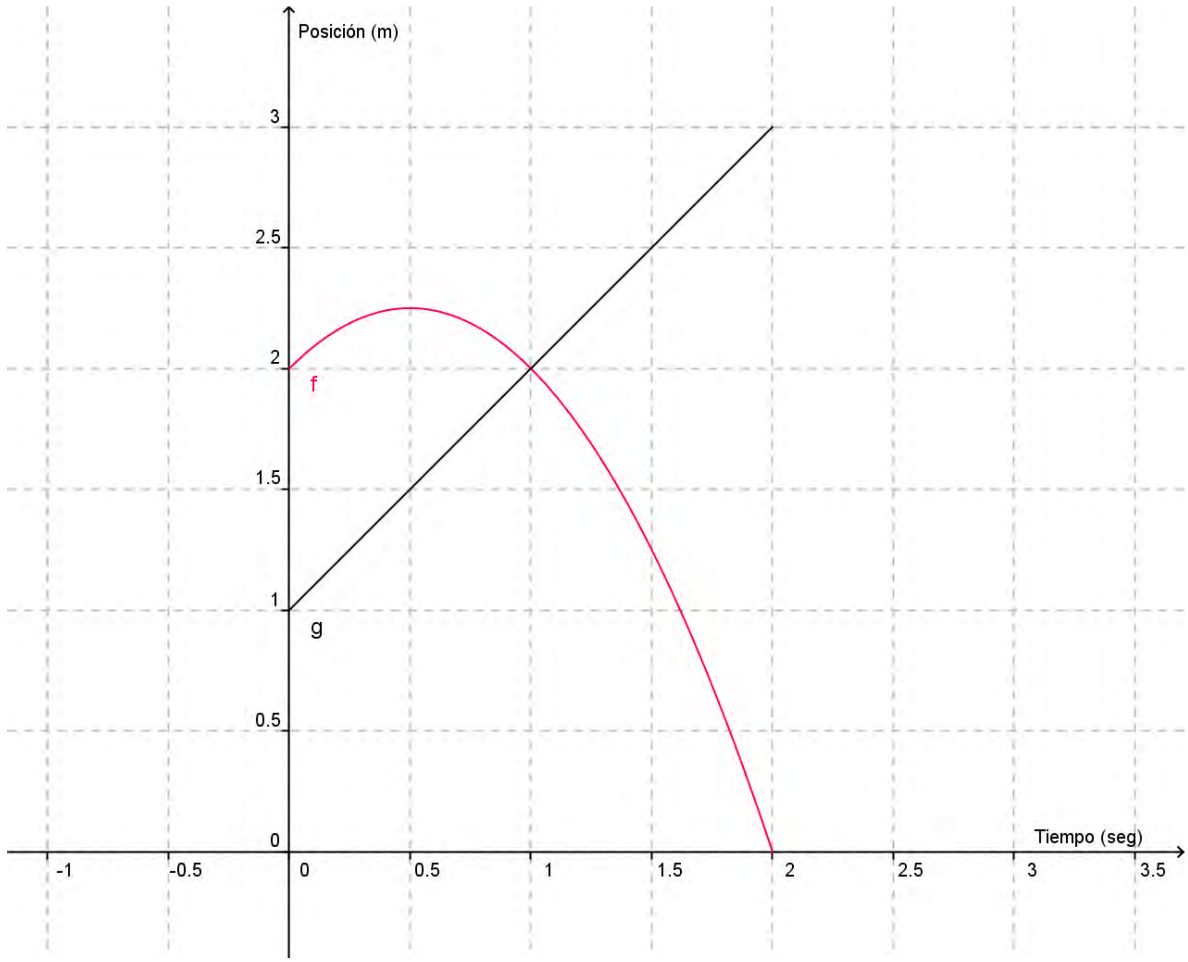
7) La gráfica muestra la posición (en metros) de un cuerpo que se mueve sobre una línea recta, en función del tiempo (en segundos).



a) Escriba sobre cada uno de los ejes, la variable que representa.
b) ¿Cuál es la posición del cuerpo al cabo de $2\ segundos$?
c) ¿En qué instantes la posición del cuerpo es $2\ metros$?

8) Se va a construir una caja abierta a partir de una pieza cuadrada de cartón, de $24\ pulgadas$ de lado, cortando cuadrados iguales de lado x de las esquinas y doblando los bordes.
a) Escriba el volumen V de la caja en función de x.
b) Halle el dominio de la función $V(x)$.

9) La gráfica muestra la posición de dos cuerpos que se mueven sobre la misma línea recta en el intervalo de tiempo $[0,2]$ (la gráfica f corresponde al cuerpo 1, y la gráfica g corresponde al cuerpo 2).



a) ¿Cuándo la posición del cuerpo 2 es mayor que $1.5\,m$? ¿Y cuándo la posición del cuerpo 1 es menor que $2\,m$?

b) ¿Cuándo la posición del cuerpo 1 es menor que la posición del cuerpo 2? ¿Cuándo la posición de los dos cuerpos es igual?

c) ¿Cuál fue el aumento de posición del cuerpo 2 en el intervalo de tiempo $[0.5,2]$?

d) ¿Cuál fue la velocidad media del cuerpo 1 en el intervalo de tiempo $[0,2]$?

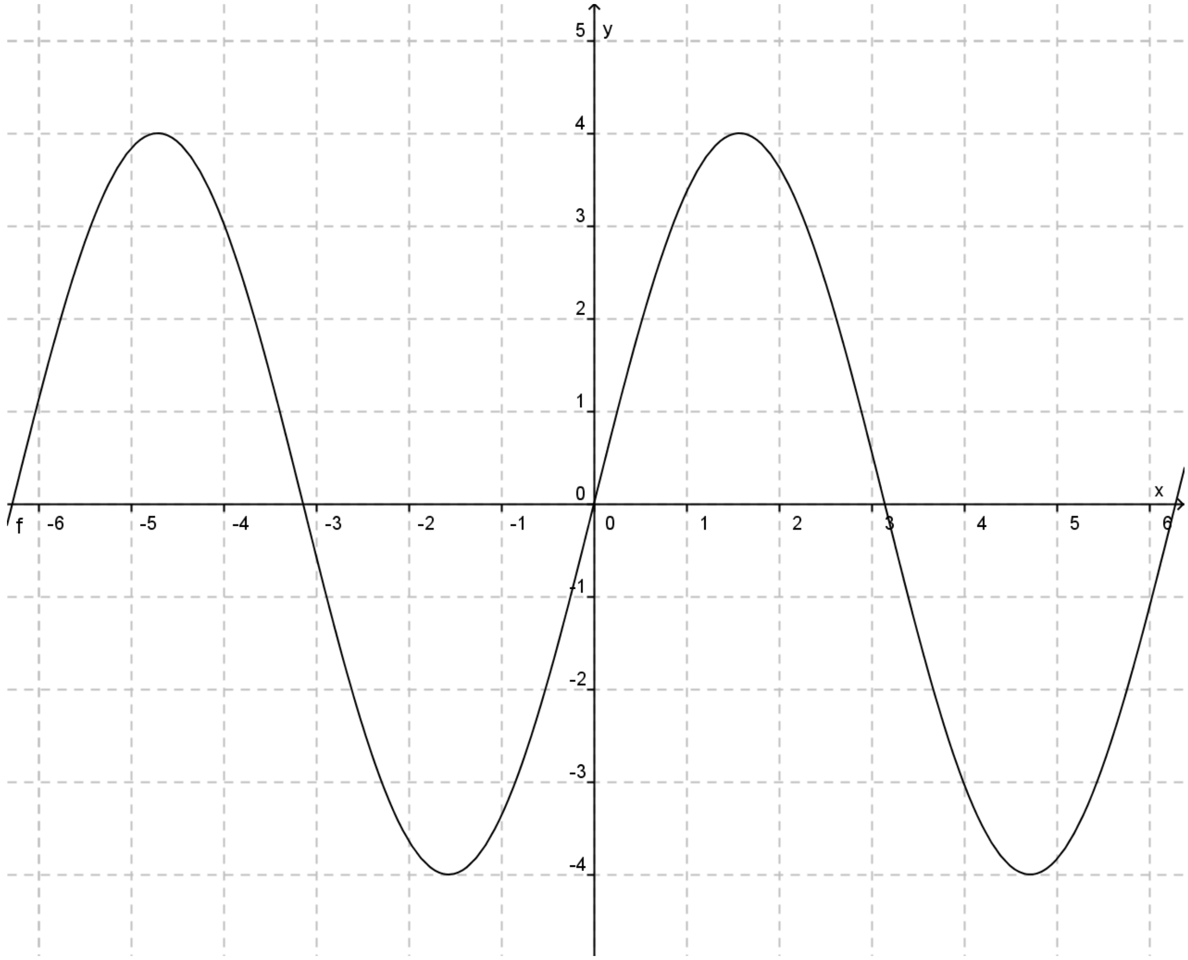
10) Determine si la siguiente proposición es verdadera o falsa. Justifique su decisión:

a) "La función $f: R - \left\{\frac{3}{2}\right\} \to R$ definida por la fórmula $f(x) = \frac{3x+1}{2x-3}$ es inyectiva"

b) "La función $f: R \to R$ definida por la fórmula $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$ es sobreyectiva"

c) "La función $f: [0,\infty) \to R$ definida por la fórmula $f(x) = \sqrt{x}$ es biyectiva"

11) Considere la función $f: R \to [-4,4]$ cuya gráfica es la siguiente:



a) Determine si f es inyectiva. Explique.

b) Determine si f es sobreyectiva. Explique.

c) Determine si f es biyectiva. Explique.

12) Halle la inversa de la función f definida por la fórmula $y = f(x) = \frac{6x-7}{5x+6}$.

Anexo 8. Matriz de datos cuantitativa para la prueba de entrada aplicada por primera vez.

U.A	v.1	v.2	v.3	v.4	v.5	v.6	v.7	v.8	v.9
1	2	2	2	2	2	2	1	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	2	2	2	2	2	2	1	2	2
4	1	2	2	1	1	2	2	2	2
5	2	2	2	2	1	2	2	2	2
6	2	2	2	2	2	2	2	2	2
7	2	2	2	2	2	2	2	2	2
8	2	2	2	2	2	2	2	2	2
9	2	2	2	2	1	2	1	2	2
10	2	2	2	2	2	2	1	2	2
11	2	2	2	2	1	2	2	2	2
12	1	2	2	2	2	2	2	2	2
13	2	2	2	2	1	2	2	2	2
14	2	2	2	2	2	2	1	2	2
15	2	2	2	2	2	2	2	2	2
16	1	2	2	2	1	2	2	2	2
17	1	2	2	1	2	2	2	2	2
18	2	2	2	2	2	2	2	2	2
19	2	2	2	2	2	2	2	2	2
20	2	2	2	2	2	2	2	2	2
21	2	2	2	2	2	2	2	2	2
22	2	2	2	2	2	2	2	2	2
23	2	2	2	2	1	2	1	2	2
24	2	2	2	2	2	2	2	2	2
25	2	2	2	2	2	1	2	2	2
26	1	2	2	2	1	2	2	2	2
27	2	2	2	2	2	2	1	2	2
28	1	2	2	1	1	1	1	2	2
29	2	2	2	2	2	2	2	2	2
30	2	2	2	2	2	2	2	2	2
31	2	2	2	2	2	2	2	2	2
32	2	2	2	2	2	2	2	2	2
33	2	2	2	2	2	2	2	2	2
34	1	1	1	2	1	1	1	2	2
35	2	2	2	2	1	1	2	2	2
36	2	2	2	2	1	2	2	2	2
37	2	2	2	2	2	2	2	2	2
38	2	2	2	2	2	2	2	2	2
39	2	2	2	2	2	2	2	1	2
40	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Anexo 9. Matriz de datos cuantitativa para la prueba de entrada aplicada por segunda vez.

U.A	v.1	v.2	v.3	v.4	v.5	v.6	v.7	v.8	v.9
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	2	1	1	1	1
3	1	1	1	1	2	1	1	1	2
4	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1	2	1	1
6	1	1	1	1	1	1	1	1	2
7	1	1	1	1	2	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	1	1	1	1	1
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1
12	1	1	1	1	2	1	1	1	2
13	1	1	1	1	1	1	1	2	1
14	1	1	1	1	2	1	1	1	1
15	1	1	1	1	1	2	1	1	1
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1
17	1	1	1	1	2	1	1	1	2
18	1	1	1	1	1	1	1	1	1
19	1	1	1	1	1	2	1	2	2
20	1	1	1	1	2	1	1	1	1
21	1	1	1	1	1	1	1	1	1
22	1	1	1	1	1	1	1	1	1
23	1	1	1	1	1	2	1	2	2
24	1	1	1	1	1	1	1	2	1
25	1	1	1	1	1	1	1	1	1
26	1	1	1	1	1	1	1	1	1
27	1	1	1	1	1	1	1	1	1
28	1	1	1	1	1	1	1	1	1
29	1	1	1	1	1	1	1	2	1
30	2	1	1	2	1	1	1	2	1
31	2	1	1	2	2	2	1	2	2
32	1	1	1	1	1	1	2	1	1
33	1	1	2	1	1	1	1	2	2
34	1	1	1	1	1	1	1	1	1
35	1	1	1	1	1	1	1	2	2
36	1	1	1	1	1	1	1	2	2
37	1	1	2	1	1	1	1	2	1
38	1	1	1	2	1	2	1	2	2
39	1	1	2	1	1	1	1	1	1
40	1	1	1	1	1	1	1	2	2

Anexo 10. Actividad en clase. Grupo 1.

UNIVERSIDAD ICESI

Álgebra y Funciones Profesor: Carlos A Quintero

Fecha: 22 de marzo de 2011.

Actividad en clase. Grupo #1.

Integrantes:

____

____

____

Condiciones: Cada grupo dispone de 15 minutos para resolver el siguiente problema, y dispone de 10 minutos para socializar su solución con el resto de sus compañeros. Cada grupo debe subir el enunciado y la solución del problema a la plataforma moodle.

Problema: De una función cuadrática f se sabe que el vértice de su gráfica es el punto $(1,-2)$ y que pasa por el punto $(4,16)$. Escriba la fórmula que define a la función f.

Anexo 11. Actividad en clase. Grupo 2.

UNIVERSIDAD ICESI

Álgebra y Funciones Profesor: Carlos A Quintero

Fecha: 22 de marzo de 2011.

Actividad en clase. Grupo #2.

Integrantes:

Condiciones: Cada grupo dispone de 15 minutos para resolver el siguiente problema, y dispone de 10 minutos para socializar su solución con el resto de sus compañeros. Cada grupo debe subir el enunciado y la solución del problema a la plataforma moodle.

Problema: Obtenga la fórmula que define a la función cuadrática cuya gráfica pasa por los puntos $(1,-1)$, $(-1,-3)$ y $(3,9)$.

Anexo 12. Actividad en clase. Grupo 3.

UNIVERSIDAD ICESI

Álgebra y Funciones Profesor: Carlos A Quintero

Fecha: 22 de marzo de 2011.

Actividad en clase. Grupo #3.

Integrantes:

____

____

____

Condiciones: Cada grupo dispone de 15 minutos para resolver el siguiente problema, y dispone de 10 minutos para socializar su solución con el resto de sus compañeros. Cada grupo debe subir el enunciado y la solución del problema a la plataforma moodle.

Problema: ¿Qué se puede decir sobre los valores de a, b y c en la expresión $f(x) = ax^2 + bx + c$, si:

i) El punto $(1,1)$ pertenece a la gráfica de f?
ii) El punto $(0,6)$ pertenece a la gráfica de f?
iii) El vértice de la gráfica de f es el punto $(1,1)$?
iv) Se satisfacen al mismo tiempo i), ii) y iii)?

Anexo 13. Actividad en clase. Grupo 4.

UNIVERSIDAD ICESI

Álgebra y Funciones Profesor: Carlos A Quintero

Fecha: 22 de marzo de 2011.

Actividad en clase. Grupo #4.

Integrantes:

____

____

____

Condiciones: Cada grupo dispone de 15 minutos para resolver el siguiente problema, y dispone de 10 minutos para socializar su solución con el resto de sus compañeros. Cada grupo debe subir el enunciado y la solución del problema a la plataforma moodle.

Problema: Determine dos números positivos cuya suma sea 100, y la suma de sus cuadrados sea mínima.

Anexo 14. Actividad en clase. Grupo 5.

UNIVERSIDAD ICESI

Álgebra y Funciones Profesor: Carlos A Quintero

Fecha: 22 de marzo de 2011.

Actividad en clase. Grupo #5.

Integrantes:

____

____

____

Condiciones: Cada grupo dispone de 15 minutos para resolver el siguiente problema, y dispone de 10 minutos para socializar su solución con el resto de sus compañeros. Cada grupo debe subir el enunciado y la solución del problema a la plataforma moodle.

Problema: Determine el área del rectángulo más grande que puede inscribirse en un triángulo rectángulo con catetos de medida 3 y $4\ centímetros$, si dos lados del rectángulo están sobre los catetos.

Anexo 15. Fotos de presentación de la prueba de entrada.

Anexo 16. Fotos de trabajo en clase.

Anexo 17. Cuestionario sobre el concepto de función.

CUESTIONARIO SOBRE EL CONCEPTO DE FUNCIÓN

1. (6 puntos) La regla de asignación f definida por la fórmula $f(x) = \sqrt{x+5}$ es una función del conjunto de los números reales en el conjunto de los números reales.

◯ Verdadero.

◯ Falso.

2. (6 puntos) Si los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{a, e, i, o, u\}$, entonces la siguiente regla de asignación es una función del conjunto A en el conjunto B.

A	1	2	3	4	5
B	a	e	i	o	u

◯ Verdadero.

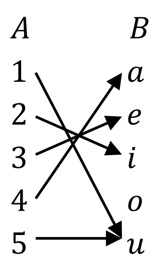
◯ Falso.

3. (6 puntos) El rango de la función $f: R \rightarrow R$ definida por la fórmula $f(x) = |x-2|$ es el conjunto de los números reales.

◯ Verdadero.

◯ Falso.

4. (6 puntos) Si los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{a, e, i, o, u\}$, entonces la siguiente regla de asignación es una función del conjunto A en el conjunto B.



◯ Verdadero.

◯ Falso.

5. (12 puntos) De la función $f: R \to [0,\infty)$ definida por la fórmula $f(x) = 2$ para todo x, es correcto afirmar que:

   Su rango es _____ Su dominio es _____ Su codominio es ____

Su rango es	Su dominio es	Su codominio es
$\{2\}$	$\{2\}$	$\{2\}$
R	R	R
$[0,\infty)$	$[0,\infty)$	$[0,\infty)$

6. (7 puntos) El dominio de la función real de variable real definida por la fórmula $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ es:
   a. $(-\infty,-2] \cup [2,\infty)$
   b. $(-\infty, \infty)$
   c. $(-\infty,-2]$
   d. $[2,\infty)$

7. (7 puntos) De los elementos de los conjuntos $M = \{Ana, María, Luisa\}$ y $H = \{José, Jaime\}$ se sabe que Ana, José y María tienen 17 años, y Jaime y Luisa tienen 20 años. La regla que asigna a cada mujer del conjunto M un hombre del conjunto H que téngala misma edad (si/no) es una función del conjunto M en el conjunto H, pero la regla que asigna a cada hombre del conjunto H una mujer del conjunto M que tenga la misma edad (si/no) es una función del conjunto H en el conjunto M.

Anexo 18. Programa del curso de Álgebra y Funciones.

Universidad ICESI — Facultad de Ingeniería — Departamento de Matemáticas y Estadística

MATERIA:	Álgebra y Funciones
CÓDIGO:	08272
REQUISITOS:	Ninguno
PROGRAMAS:	Administración de Empresas, Biología, Ciencias Políticas, Contaduría y Finanzas Internacionales, Economía y Negocios Internacionales, Economía, Diseño Industrial, Diseño de Medios Interactivos, Ingeniería Industrial, Ingeniería de Sistemas, Ingeniería Telemática, Mercadeo Internacional y Publicidad, Química, Química Farmacéutica.
PERÍODO ACADÉMICO:	2011 -1
INTENSIDAD HORARIA:	5 Horas por semana
CRÉDITOS	4

1 OBJETIVO GENERAL.

El estudiante que aprueba este curso estará en capacidad de usar e interpretar correctamente la notación simbólica del álgebra y de las funciones elementales y de utilizar los conceptos, resultados y algoritmos propios de estos temas, para resolver ejercicios sobre ellos, y para modelar y resolver problemas pertinentes de la vida práctica y en diferentes contextos, interpretando las soluciones.

2 OBJETIVOS TERMINALES.

El estudiante que apruebe este curso está en capacidad de:

2.1 Aplicar correctamente las propiedades algebraicas de los números reales en los procesos de simplificación de expresiones numéricas y algebraicas, que las requieran.

2.2 Aplicar correctamente las propiedades algebraicas y de orden de los números reales en la solución de ecuaciones y de inecuaciones lineales o cuadráticas, cuando se requieran.

2.3 Determinar los elementos asociados a ecuaciones polinómicas y a su solución: grado, coeficientes, factores, raíces o ceros, y multiplicidad.

2.4 Identificar e interpretar una correspondencia entre conjuntos, expresada en forma gráfica o simbólica, como una función.

2.5 Identificar, o determinar, para una función dada o construida, los conjuntos asociados a ella: dominio, codominio, rango y gráfica.

2.6 Identificar el modelo $y= mx + b$ como la ecuación de una recta y utilizar o determinar los elementos relacionados: pendiente, interceptos, paralelismo, perpendicularidad y proporcionalidad.

2.7 Establecer, a partir de una ecuación general de primero o segundo grado, si la gráfica correspondiente es una recta, una parábola, una circunferencia, una elipse o una hipérbola.

2.8 Operar con expresiones de tipo exponencial y logarítmico y utilizarlas para modelar y resolver problemas y decidir si la solución es o no razonable.

2.9 Utilizar las relaciones trigonométricas en el estudio de identidades básicas, en la solución de ecuaciones sencillas y en la determinación de elementos de triángulos y en la solución de problemas relacionados.

2.10 Resolver problemas mediante la construcción y solución de los modelos matemáticos que los representan, decidir sobre lo razonable o no de la solución y transferir los métodos y las soluciones a otros contextos.

3 OBJETIVOS ESPECÍFICOS DE FORMACIÓN ACADÉMICA.

3.1 **UNIDAD 1**: Números Reales y conceptos fundamentales de álgebra (3 semanas).

3.1.1 Determinar a cuál o a cuáles subconjuntos del conjunto de los números reales pertenece un número real dado.

3.1.2 Enunciar, escribir y utilizar correctamente las propiedades de la suma y de la multiplicación de números reales.

3.1.3 Enunciar, escribir y utilizar correctamente las propiedades de la potenciación y de la radicación de números reales.

3.1.4 Hallar o establecer equivalencias entre formas decimal, fraccionaria y porcentual de un real dado.

3.1.5 Utilizar correctamente las propiedades de los números reales en la manipulación y simplificación de expresiones algebraicas.

3.1.6 Utilizar la relación de orden en los números reales para establecer precedencia o igualdad entre dos números dados, y ubicar correctamente números reales en la recta numérica.

3.1.7 Enunciar y escribir correctamente la definición y las propiedades del valor absoluto de un número real.

3.1.8 Utilizar adecuadamente las formas equivalentes de representación de intervalos de números reales y decidir si un número real dado pertenece o no a un intervalo dado

3.1.9 Resolver problemas de aplicación con las operaciones estudiadas (entre ellos, problemas de porcentajes) y escribir e interpretar la respuesta en cada caso.

3.2 **UNIDAD 2**: Ecuaciones, desigualdades y desigualdades con una variable (3 semanas).

3.2.1 Identificar y diferenciar los conceptos de igualdad, identidad, ecuación, desigualdad y desigualdad con una variable.

3.2.2 Definir solución de una ecuación y decidir si un número dado es o no solución de una ecuación dada.

3.2.3 Definir solución de una desigualdad con una variable y decidir si un número dado o un conjunto dado de números son o no solución de la misma.

3.2.4 Resolver ecuaciones lineales en una variable y resolver problemas de aplicación relacionados.

3.2.5 Resolver ecuaciones cuadráticas en una variable y resolver problemas de aplicación relacionados.

3.2.6 Resolver sistemas formados por una ecuación lineal en dos variables y una ecuación cuadrática en dos variables.

3.2.7 Hallar la solución gráfica de ecuaciones lineales en dos variables y resolver problemas de aplicación relacionados.

3.2.8 Hallar la solución gráfica de ecuaciones en dos variables de la forma $y = ax^2 + bx + c$ y resolver problemas de aplicación relacionados.

3.2.9 Resolver ecuaciones que involucren algunos de los siguientes elementos: radicales, potencias cúbicas, valor absoluto, soluciones complejas con parte imaginaria.

3.2.10 Resolver desigualdades cuadráticas.

3.2.11 Resolver desigualdades lineales, que involucran valor absoluto.

3.3 **UNIDAD 3**: Polinomios y Teorema Fundamental del Álgebra (1.5 semanas).

3.3.1 Enunciar correctamente las definiciones de polinomio en una variable y de polinomio cero o nulo.

3.3.2 Identificar el grado y los coeficientes de un polinomio dado y su valor para valores dados de la variable.

3.3.3 Definir cero o raíz de un polinomio y utilizar adecuadamente el concepto.

3.3.4 Efectuar operaciones de suma, resta, multiplicación y división entre polinomios.

3.3.5 Utilizar correctamente la técnica de la división sintética.

3.3.6 Enunciar los teoremas del residuo y del factor y utilizarlos para factorizar polinomios y para identificar la multiplicidad de las raíces.

3.3.7 Enunciar el Teorema fundamental del Álgebra y resolver ejercicios y problemas de aplicación que lo involucren.

3.4 **UNIDAD 4**: Funciones: conceptos generales y conjuntos asociados a una función (3 semanas).

3.4.1 Identificar correspondencias funcionales entre conjuntos.

3.4.2 Definir dominio, codominio, rango y gráfica de una función y establecer tales conjuntos en algunos casos dados.

3.4.3 Utilizar e interpretar adecuadamente la notación simbólica asociada al concepto de función.

3.4.4 Construir e interpretar gráficas que describan alguna función dada (en particular, funciones del tipo: $f(x)=ax^2 + bx + c$, $f(x)=|x|$ y $f(x)= (x)^{1/2}$

3.4.5 Clasificar una función dada como inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.

3.4.6 Resolver problemas de aplicación que involucren el concepto de función y sus diferentes representaciones.

3.4.7 Utilizar operaciones algebraicas básicas para encontrar la inversa de una función inyectiva restringida a su rango.

3.5 **UNIDAD 5**: Función Lineal (1.5 semanas).

3.5.1 Identificar e interpretar la pendiente y el intercepto en una expresión de la forma $y = mx + b$ y construir la respectiva representación gráfica.

3.5.2 Llevar una expresión de la forma y = mx+ b a una expresión equivalente de la forma Ax+Cy+D=0, o llevar una expresión de la forma Ax+Cy+D a la forma y = mx+b.

3.5.3 Responder dos tipos de preguntas referentes a una línea recta cuya ecuación se conoce: i) determinar puntos que pertenezcan a la recta y ii) decidir si un punto dado pertenece a la recta.

3.5.4 Determinar la pendiente y el intercepto de una línea recta cuya representación gráfica se ha dado.

3.5.5 Determinar la ecuación una línea recta a partir de dos tipos de información sobre ella: i) dos puntos que pertenecen a la recta y ii) un punto que pertenece a la recta y la pendiente de la recta.

3.5.6 Identificar la proporcionalidad directa con el modelo lineal y = mx y resolver problemas de aplicación relacionados con el concepto de proporcionalidad directa.

3.5.7 Identificar las relaciones de paralelismo y perpendicularidad entre dos rectas dadas, a partir de las relaciones entre sus respectivas pendientes.

3.5.8 Resolver ejercicios y problemas de aplicación relacionados con los conceptos de paralelismo y perpendicularidad.

3.6 **UNIDAD 6**: Análisis de la ecuación general de la forma $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ (1 semana).

3.6.1 Utilizar herramientas de álgebra básica para llevar una ecuación general de la forma $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ a alguna de las formas canónicas: $y-k=c(x-h)^2$, $x-h=c(y-k)^2$, $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$, $-\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$, $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ o $ax+by+c=0$.

3.6.2 Identificar las gráficas asociadas a cada una de las formas canónicas descritas en el ítem anterior e identificar, según el caso, los elementos principales de la gráfica: vértice, centro, eje principal de simetría, radio, pendiente e intercepto.

3.6.3 Resolver analítica o gráficamente, según el caso, problemas de intercepción entre dos curvas representadas por la ecuación general de la forma $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ o por sus formas canónicas equivalentes.

3.7 **UNIDAD 7**: Expresiones exponenciales y logarítmicas (1.5 semanas).

3.7.1 Identificar expresiones de la forma $y=a^x$, con $a>0$, como funciones exponenciales, describiendo claramente su dominio, su codominio, su rango y su gráfica.

3.7.2 Utilizar las propiedades algebraicas de la potenciación de números reales para simplificar y operar con funciones exponenciales.

3.7.3 Identificar comportamientos de crecimiento o decrecimiento exponencial y representarlos adecuadamente con el modelo $y=a^x$

3.7.4 Relacionar la expresión logarítmica $y=log_a x$ con su forma exponencial equivalente: $x=a^y$, e identificar la función logarítmica $y=log_a x$, describiendo claramente su dominio, su codominio, su rango y su gráfica.

3.7.5 Utilizar las propiedades algebraicas de la potenciación de números reales para simplificar y operar con funciones logarítmicas.

3.7.6 Utilizar adecuadamente una calculadora científica para calcular exponenciales y logaritmos en cualquier base admisible.

3.7.7 Resolver ecuaciones que involucren exponenciales y logaritmos.

3.7.8 Resolver problemas que involucren modelación con funciones exponenciales.

3.8 **UNIDAD 8.** Trigonometría (1.5 semanas).

3.8.1 Identificar las razones trigonométricas definidas en un triángulo rectángulo.

3.8.2 Deducir por construcciones geométricas básicas las razones trigonométricas de ángulos notables con valores como 30, 45 o 60 grados.

3.8.3 Deducir por construcciones geométricas básicas algunas identidades trigonométricas fundamentales.

3.8.4 Identificar las relaciones trigonométricas definidas en un círculo unitario ubicado en un sistema cartesiano de coordenadas rectangulares, y extrapolarlas por semejanza y congruencia de triángulos, a círculos de cualquier radio y a ángulos no agudos, positivos o negativos.

3.8.5 Establecer la correspondencia entre la medida de un ángulo en grados y su medida equivalente en radianes, y utilizar la ubicación del ángulo en el sistema coordenado para determinar el valor de sus razones trigonométricas.

3.8.6 Identificar las fórmulas que aplican a las razones trigonométricas de la suma de ángulos.

3.8.7 Resolver, para la variable θ en radianes, ecuaciones de la forma $E(\theta)=k$, donde E representa alguna de las razones trigonométricas y k es un número real conocido.

Anexo 19. Función inyectiva, sobreyectiva y biyectiva 1.

UNIVERSIDAD ICESI

Álgebra y Funciones Profesor: Carlos A Quintero

Fecha: 24 de marzo de 2011.

Actividad en clase. Grupo #1.

Integrantes:

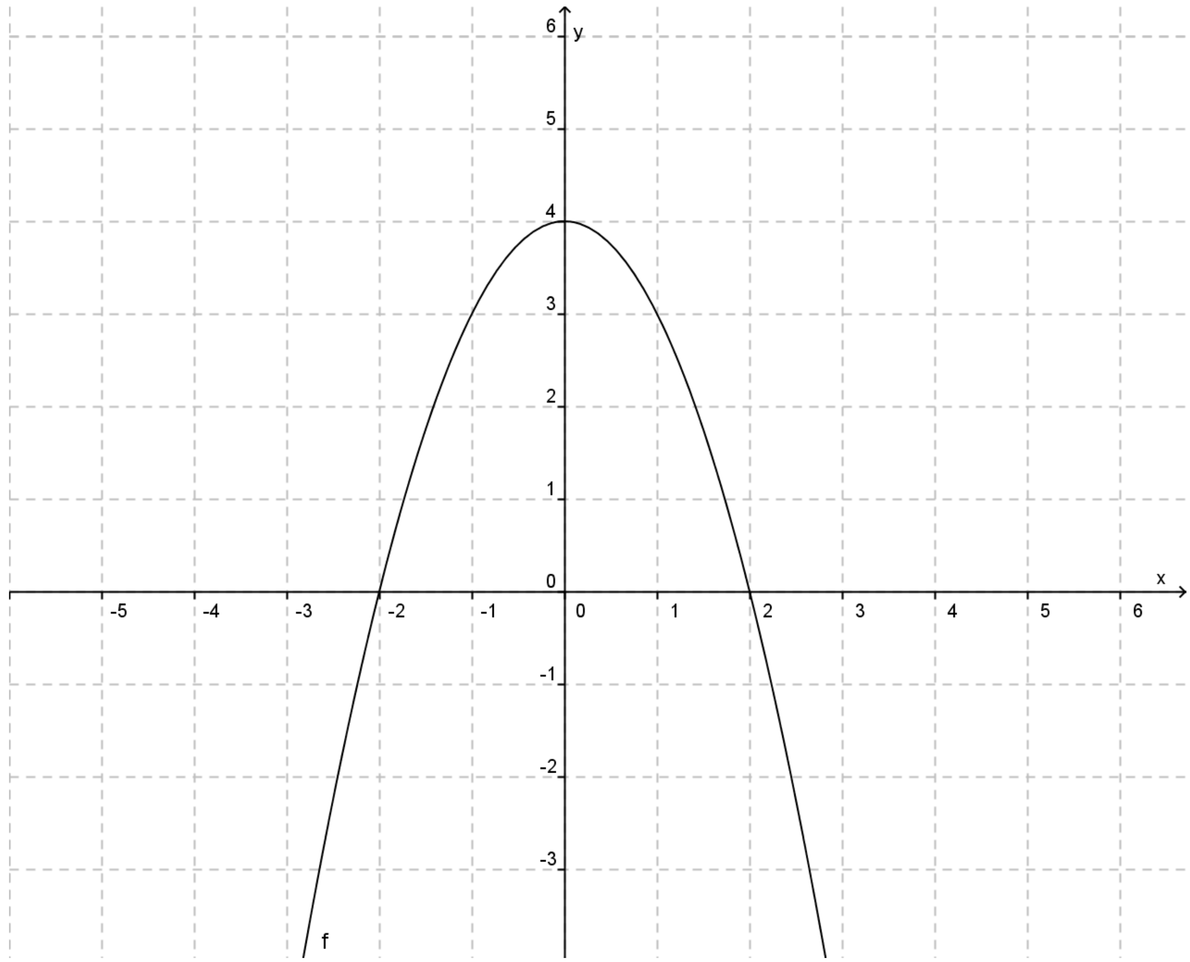
____

____

____

Condiciones: Cada grupo dispone de 15 minutos para resolver los siguientes ejercicios, y dispone de 10 minutos para socializar su solución con el resto de sus compañeros.

1) Considere la función $f: R \rightarrow R$ cuya gráfica es la siguiente:



a) Determine si f es inyectiva. Explique.
b) Determine si f es sobreyectiva. Explique.
c) Determine si f es biyectiva. Explique.

2) Considere la función $f: R - \left\{\frac{2}{3}\right\} \rightarrow R$ definida por la fórmula $f(x) = \frac{2x+3}{3x-2}$. Determine si f es inyectiva.

Anexo 20. Función inyectiva, sobreyectiva y biyectiva 2.

UNIVERSIDAD ICESI

Álgebra y Funciones Profesor: Carlos A Quintero

Fecha: 24 de marzo de 2011.

Actividad en clase. Grupo #2.

Integrantes:

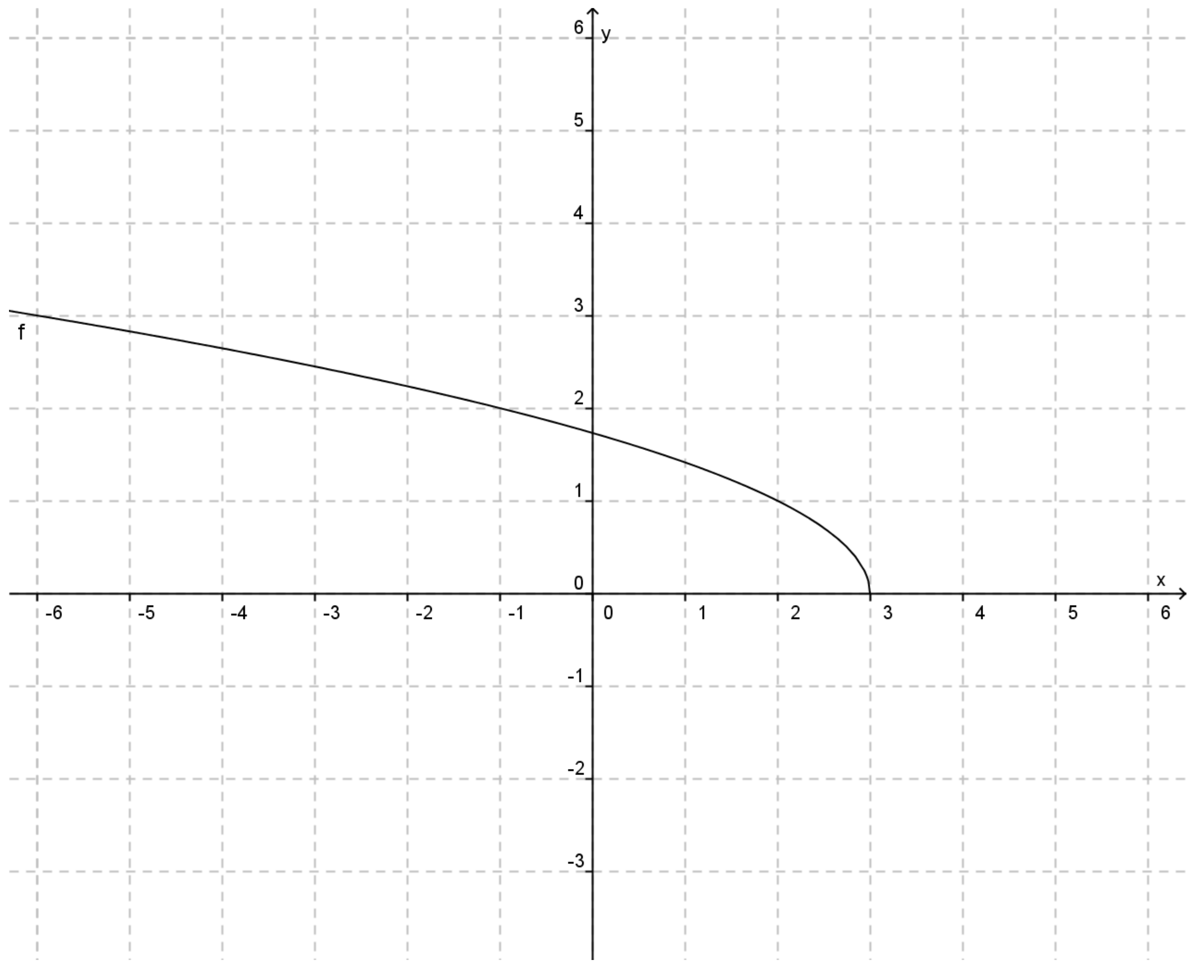
____

____

____

Condiciones: Cada grupo dispone de 15 minutos para resolver los siguientes ejercicios, y dispone de 10 minutos para socializar su solución con el resto de sus compañeros.

1) Considere la función $f: (-\infty, 3] \to R$ cuya gráfica es la siguiente:



a) Determine si f es inyectiva. Explique.
b) Determine si f es sobreyectiva. Explique.
c) Determine si f es biyectiva. Explique.

2) Considere la función $f: R \rightarrow R$ definida por la fórmula $f(x) = \frac{x^2}{x^4+1}$. Determine si f es inyectiva.

Anexo 21. Función inyectiva, sobreyectiva y biyectiva 3.

UNIVERSIDAD ICESI

Álgebra y Funciones | Profesor: Carlos A Quintero

Fecha: 24 de marzo de 2011.

Actividad en clase. Grupo #3.

Integrantes:

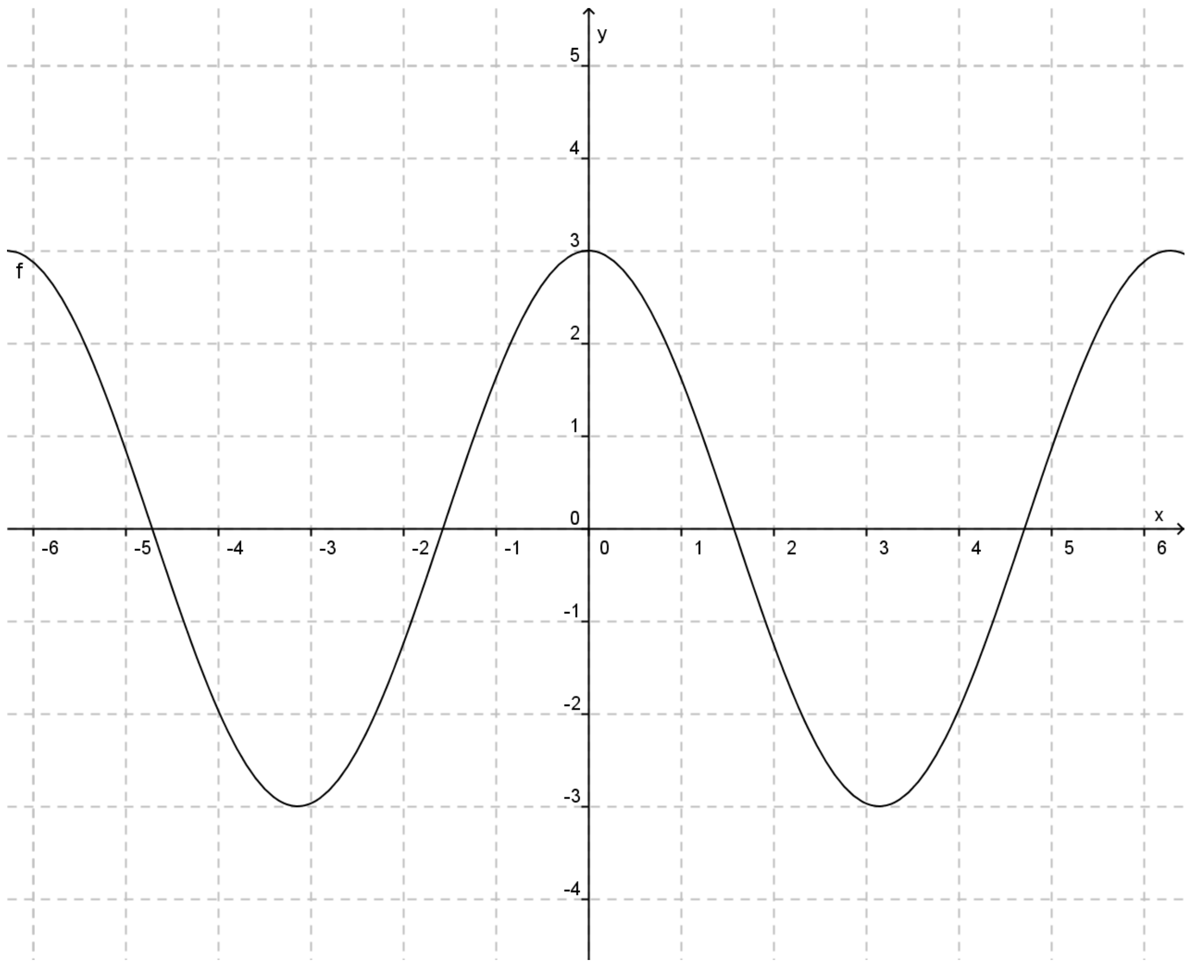
____

____

____

Condiciones: Cada grupo dispone de 15 minutos para resolver los siguientes ejercicios, y dispone de 10 minutos para socializar su solución con el resto de sus compañeros.

1) Considere la función $f\colon R \rightarrow [-3,3]$ cuya gráfica es la siguiente:



a) Determine si f es inyectiva. Explique.
b) Determine si f es sobreyectiva. Explique.
c) Determine si f es biyectiva. Explique.

2) Considere la función $f: R \to R$ definida por la fórmula $f(x) = -x^3 + 1$. Determine si f es inyectiva.

Anexo 22. Función inyectiva, sobreyectiva y biyectiva 4.

UNIVERSIDAD ICESI

Álgebra y Funciones Profesor: Carlos A Quintero

Fecha: 24 de marzo de 2011.

Actividad en clase. Grupo #4.

Integrantes:

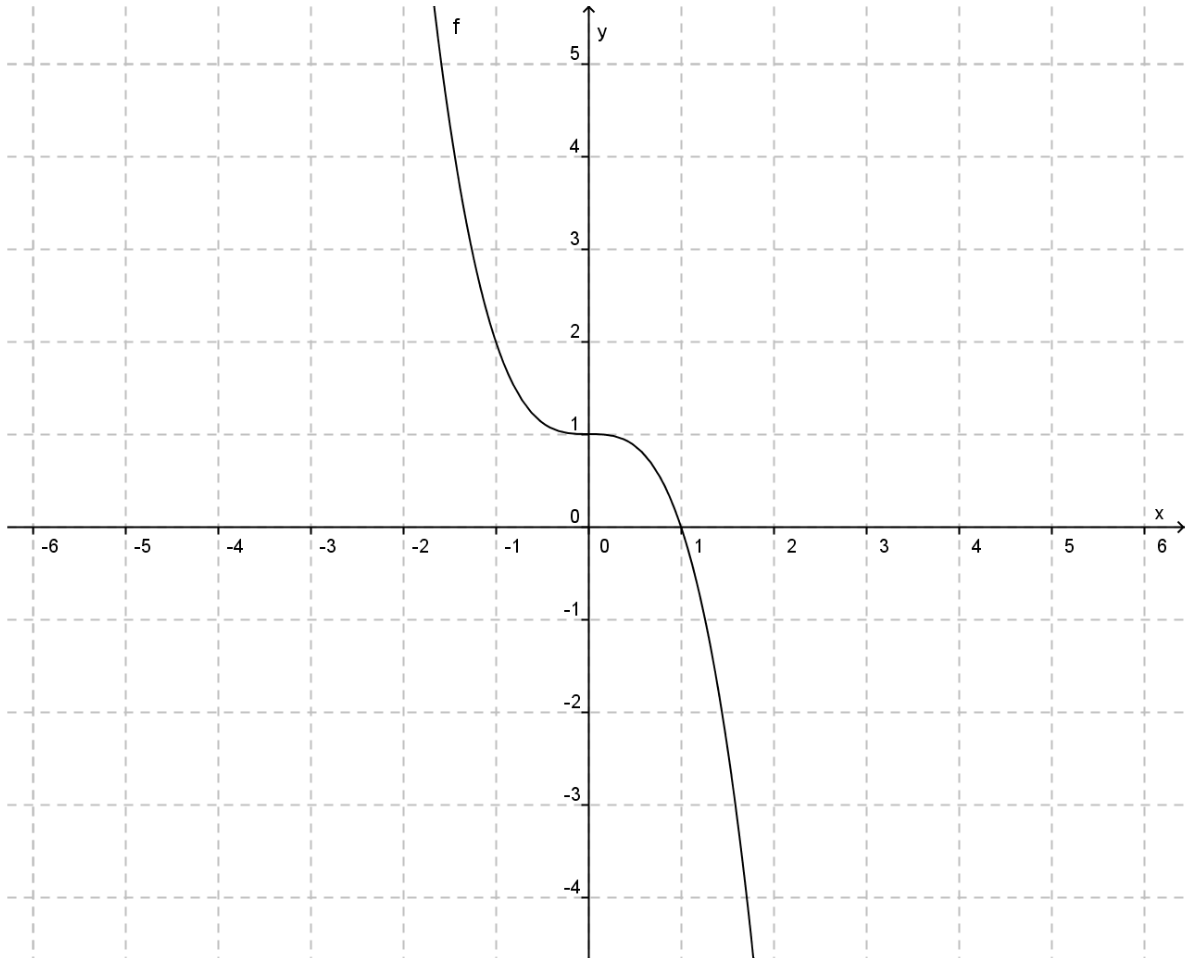
____

____

____

Condiciones: Cada grupo dispone de 15 minutos para resolver los siguientes ejercicios, y dispone de 10 minutos para socializar su solución con el resto de sus compañeros.

1) Considere la función $f: R \to R$ cuya gráfica es la siguiente:



a) Determine si f es inyectiva. Explique.
b) Determine si f es sobreyectiva. Explique.
c) Determine si f es biyectiva. Explique.

2) Considere la función $f:(-\infty,-1] \rightarrow R$ definida por la fórmula $f(x) = -3x^2 - 6x + 1$. Determine si f es inyectiva.

Anexo 23. Función inyectiva, sobreyectiva y biyectiva 5.

UNIVERSIDAD ICESI

Álgebra y Funciones Profesor: Carlos A Quintero

Fecha: 24 de marzo de 2011.

Actividad en clase. Grupo #5.

Integrantes:

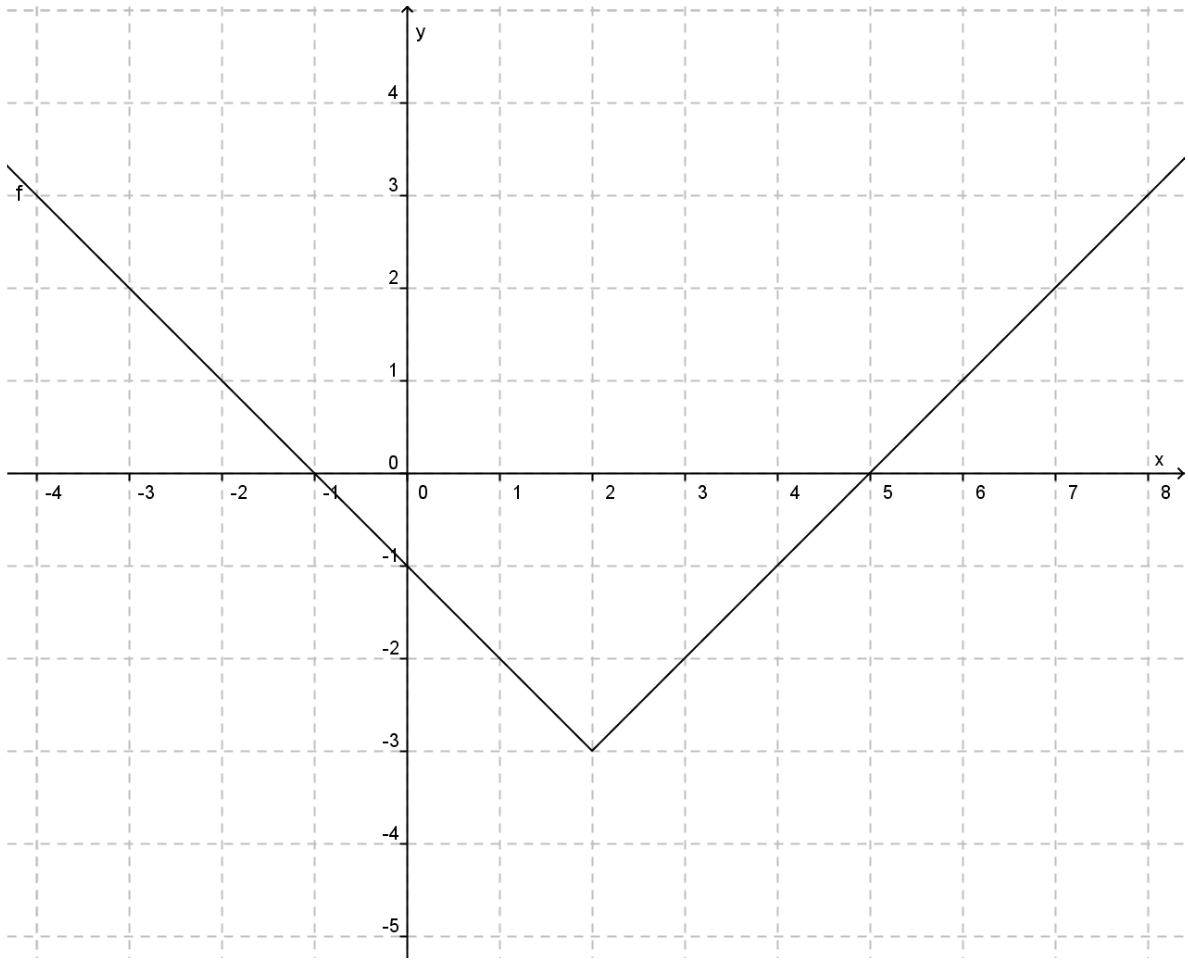
____

____

____

Condiciones: Cada grupo dispone de 15 minutos para resolver los siguientes ejercicios, y dispone de 10 minutos para socializar su solución con el resto de sus compañeros.

1) Considere la función $f: R \to R$ cuya gráfica es la siguiente:



a) Determine si f es inyectiva. Explique.
b) Determine si f es sobreyectiva. Explique.
c) Determine si f es biyectiva. Explique.

2) Considere la función $f:[-1,0] \to R$ definida por la fórmula $f(x) = |x|$. Determine si f es inyectiva.

Anexo 24. Obtención de un modelo cuadrático.

UNIVERSIDAD ICESI

Álgebra y Funciones Profesor: Carlos A Quintero

Fecha: 22 de marzo de 2011.

Discusión en clase (introducción)

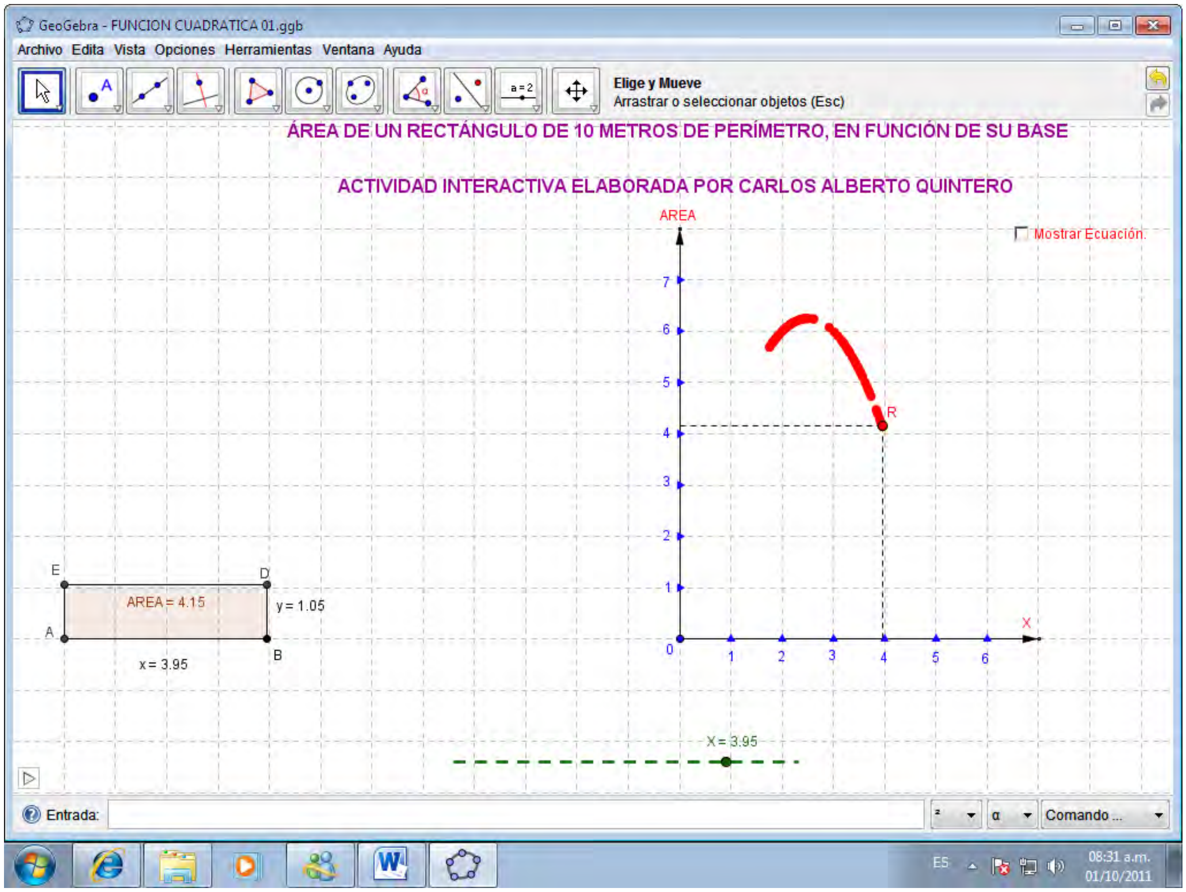
Problema: Considere todos los rectángulos que tienen perímetro de $10\ metros$.

- Complete la siguiente tabla:

Base (m)	3		1,5		x
Altura (m)		1			y
Perímetro (m)	2(3)+2( ) =10	=10	=10	2( )+2( ) =10	=10
Área (m^2)	(3)( )=	( )(1)=	(1,5)( )=	( )( )=	( )( )

- Escriba la fórmula que permite obtener el área A del rectángulo en función de la base x.
- Determine el dominio admisible de la función $A(x)$.
- Construya la gráfica de la función $A(x)$.
- Determine las dimensiones de aquel rectángulo que tiene mayor área, y calcule esta área máxima.
- Verifique su resultado con la actividad interactiva diseñada por su profesor y que utiliza el programa GeoGebra.

Anexo 25. Área de un rectángulo de 10 metros de perímetro, en función de su base.



Anexo 26. Lectura e interpretación de una gráfica 1.

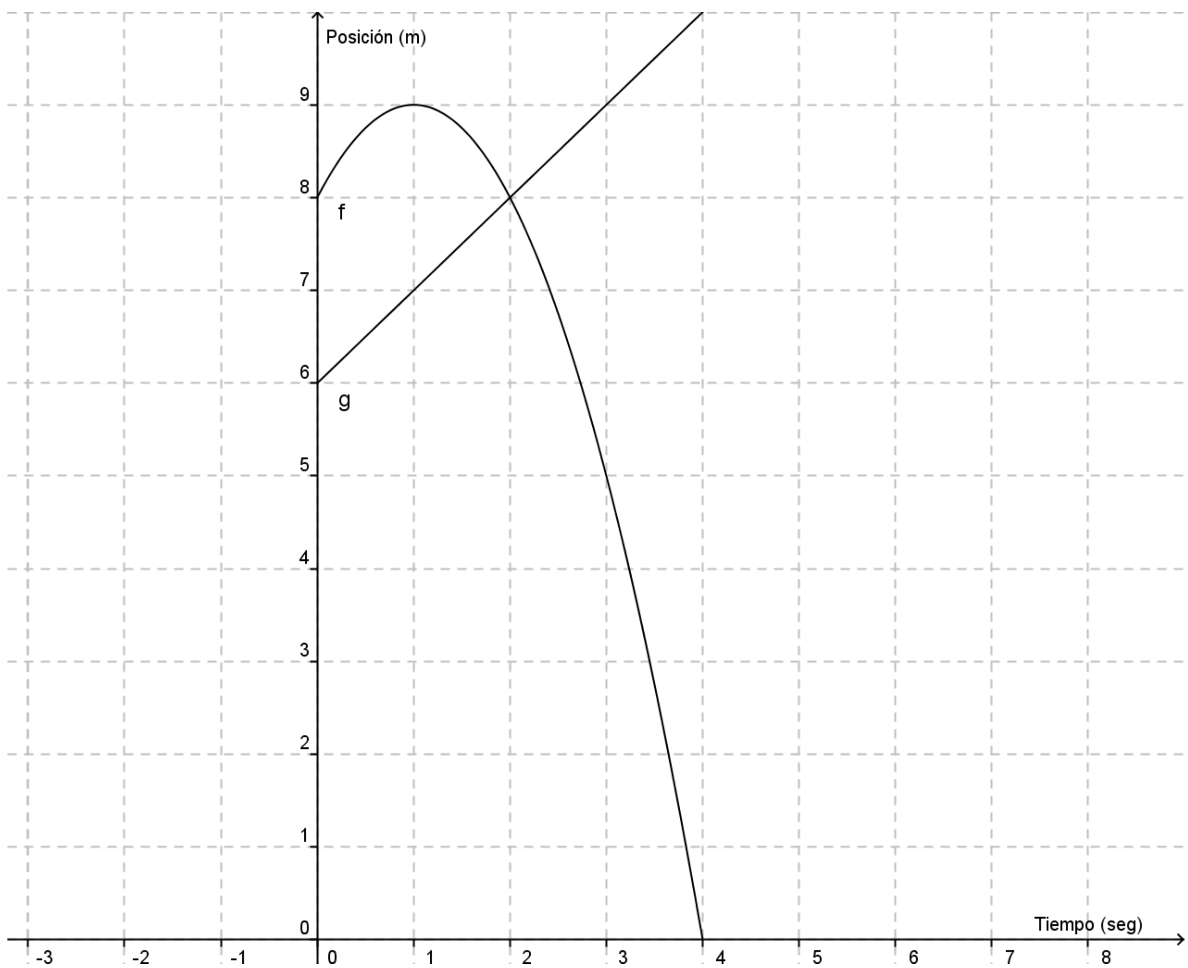
UNIVERSIDAD ICESI

Álgebra y Funciones Profesor: Carlos A Quintero

Fecha: 15 de marzo de 2011.

Actividad en clase.

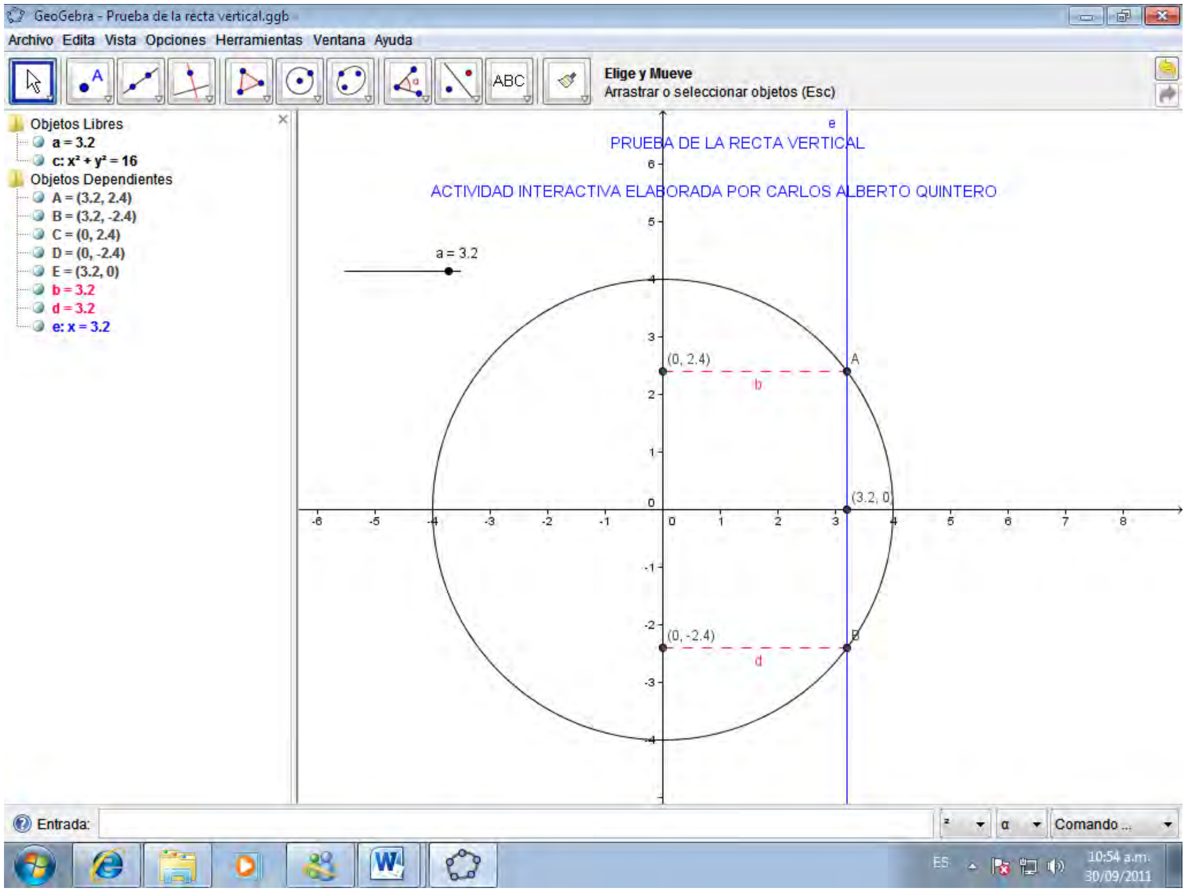
En la gráfica se muestra la posición de dos cuerpos que se mueven sobre la misma línea recta en el intervalo de tiempo $[0,4]$ (la gráfica f corresponde al cuerpo 1, y la gráfica g corresponde al cuerpo 2).



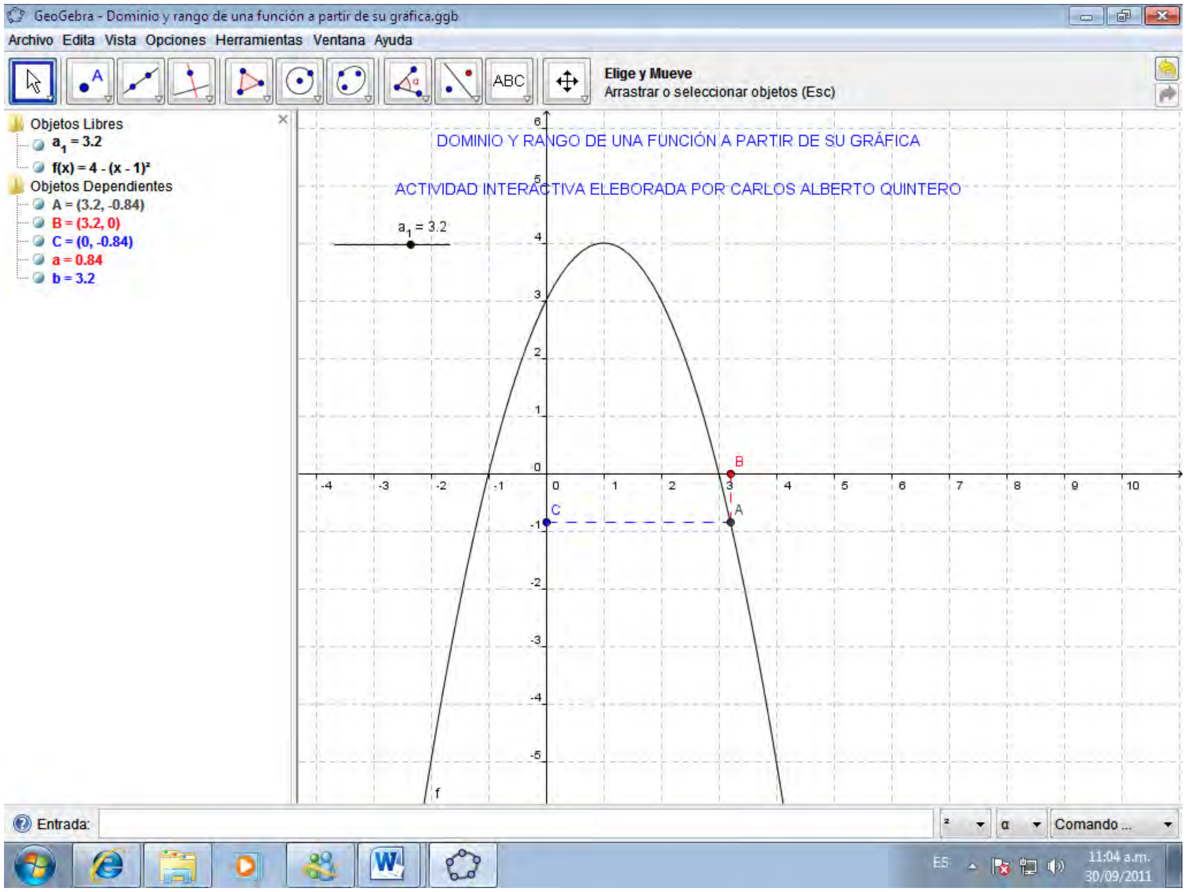
- ¿Cuál es la posición del cuerpo 2 cuando ha transcurrido 1 segundo?
- ¿Cuál es la posición del cuerpo 1 cuando han transcurrido 3 segundos?
- ¿En qué instantes la posición del cuerpo 1 es 8 metros?
- ¿En qué instante la posición del cuerpo 2 es 9 metros?

- ¿Cuándo la posición del cuerpo 2 es mayor que 9 metros?
- ¿Cuándo la posición del cuerpo 1 es mayor que 8 metros?
- ¿Cuándo la posición del cuerpo 1 es mayor que la posición del cuerpo 2?
- ¿Cuándo la posición de los dos cuerpos es la misma?
- ¿Cuál fue la disminución de posición del cuerpo 1 en el intervalo de tiempo $[2,3]$?
- ¿En qué intervalo la posición del cuerpo 1 es creciente?
- ¿Cuál es la posición máxima del cuerpo 1?

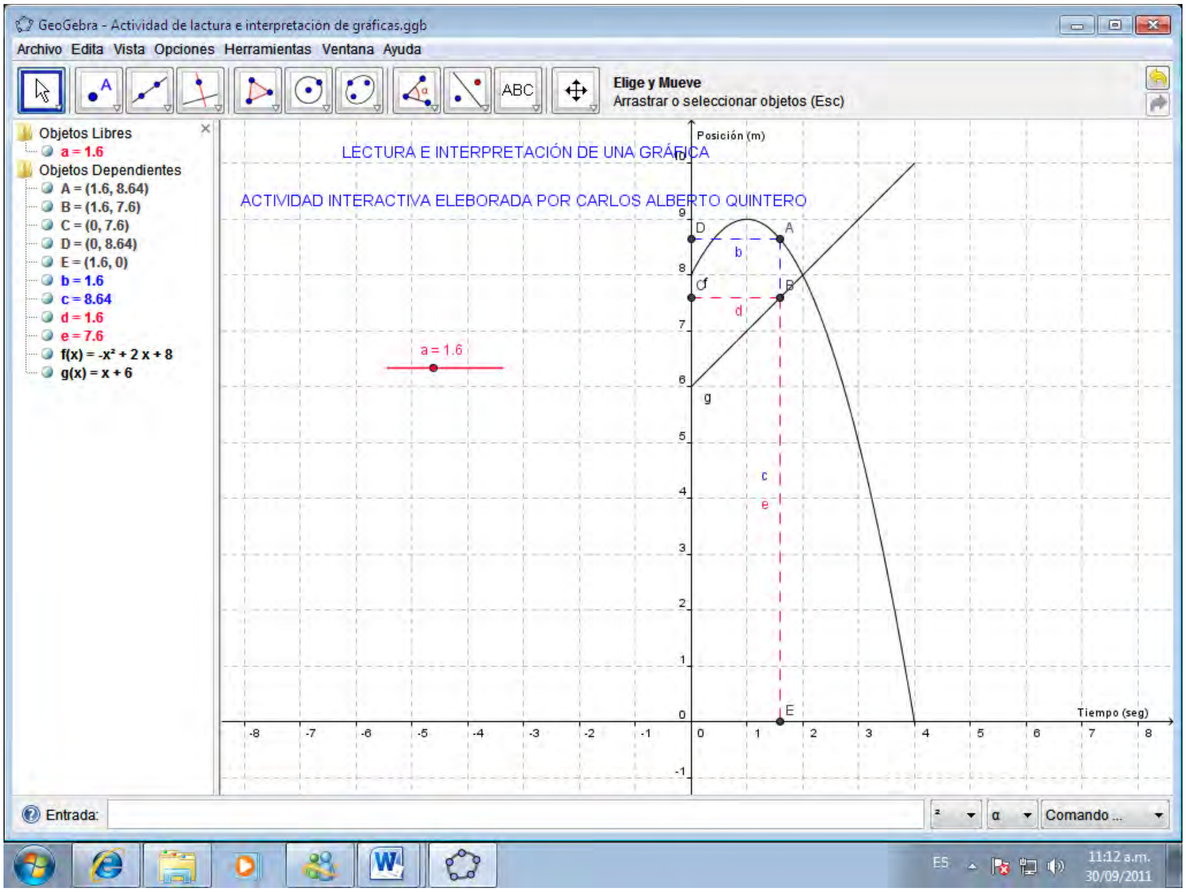
Anexo 27. Prueba de la recta vertical.



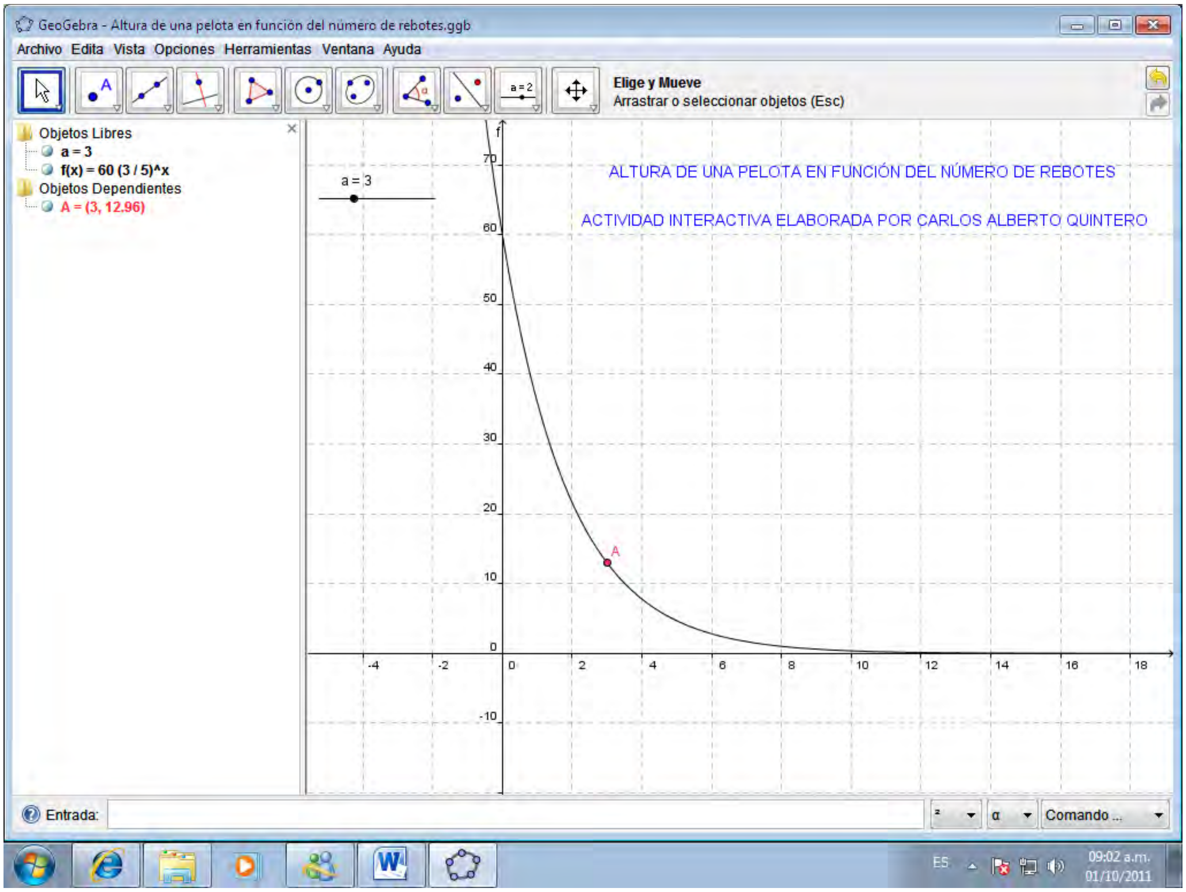
Anexo 28. Dominio y rango de una función a partir de su gráfica.



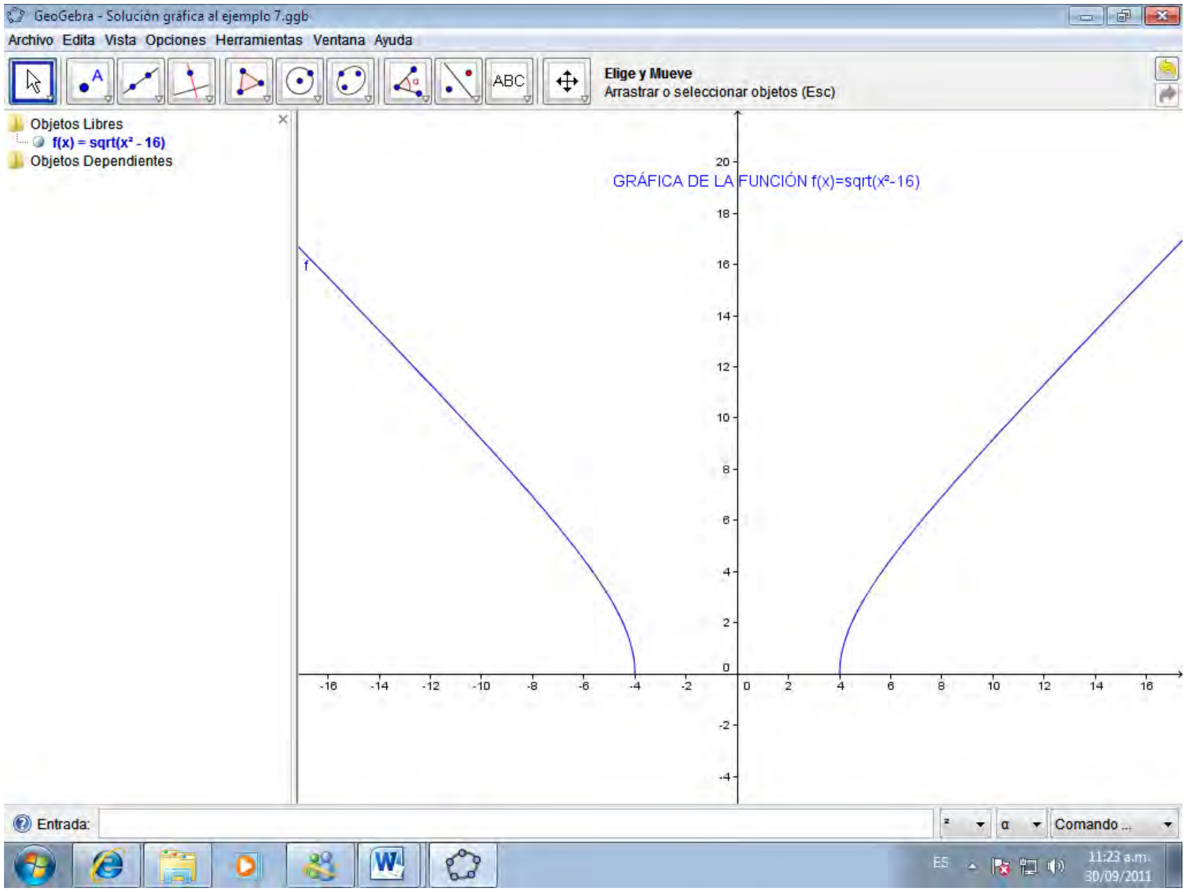
Anexo 29. Lectura e interpretación de una gráfica 2.



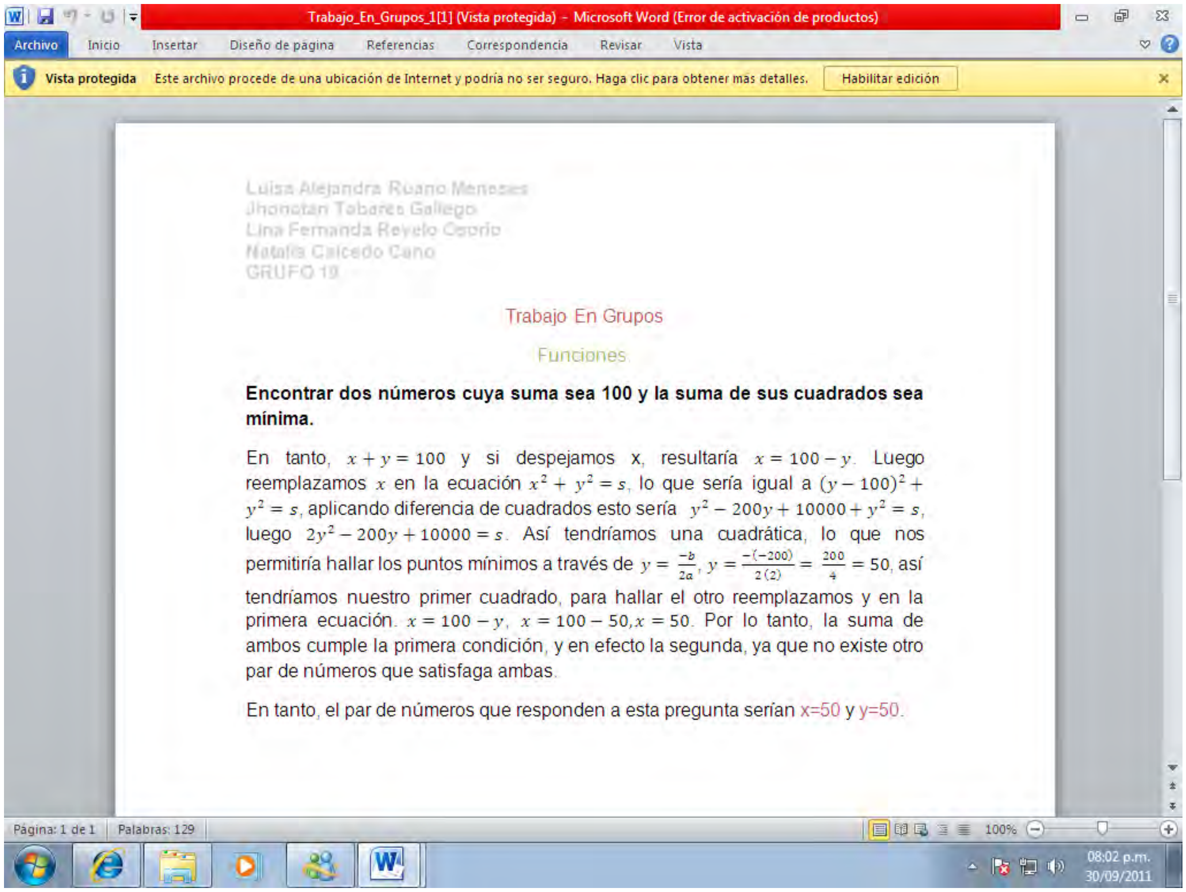
Anexo 30. Altura de una pelota en función del número de rebotes.



Anexo 31. Gráfica de la función f(x)=sqrt(x^2-16).



Anexo 32. Evidencia trabajo en grupo.



Luisa Alejandra Ruano Meneses
Jhonotan Tabares Gallego
Lina Fernanda Revelo Osorio
Natalia Caicedo Cano
GRUFO 10

Trabajo En Grupos

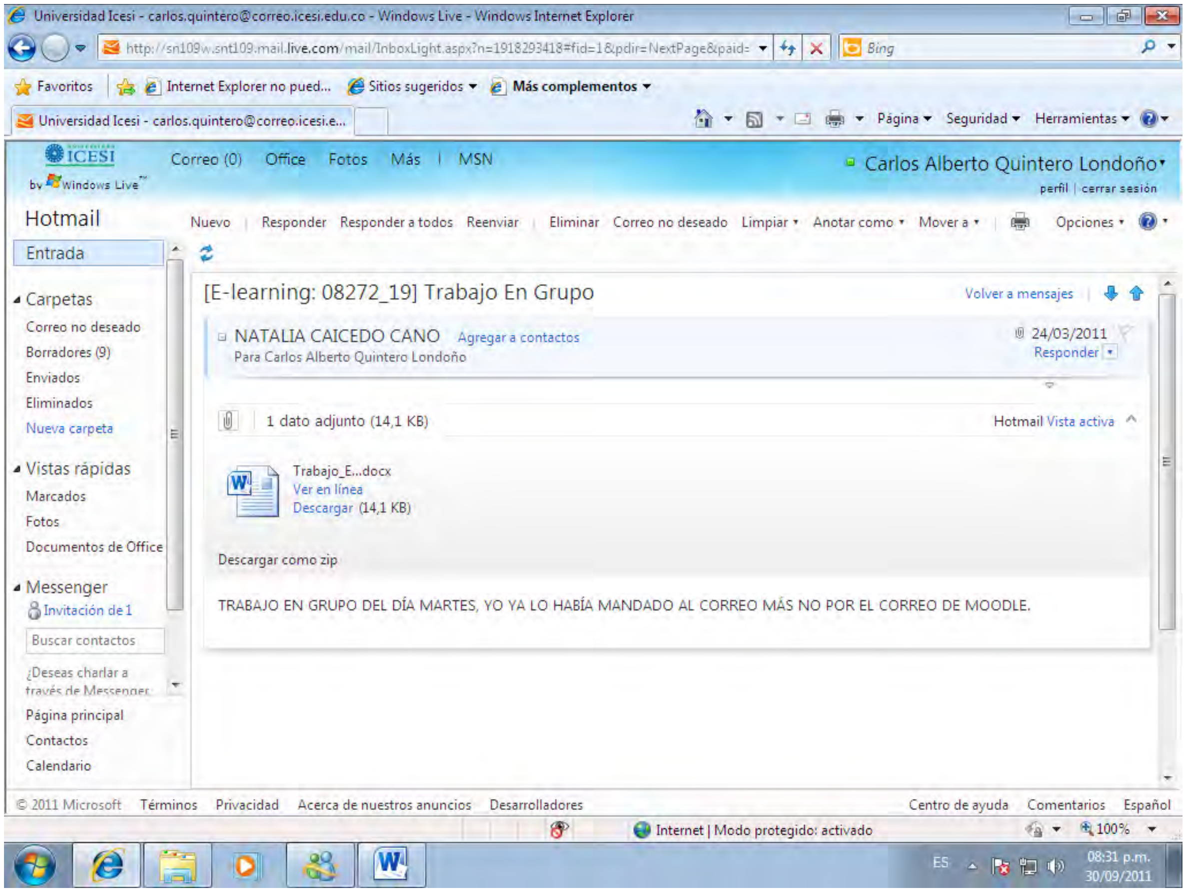
Funciones

Encontrar dos números cuya suma sea 100 y la suma de sus cuadrados sea mínima.

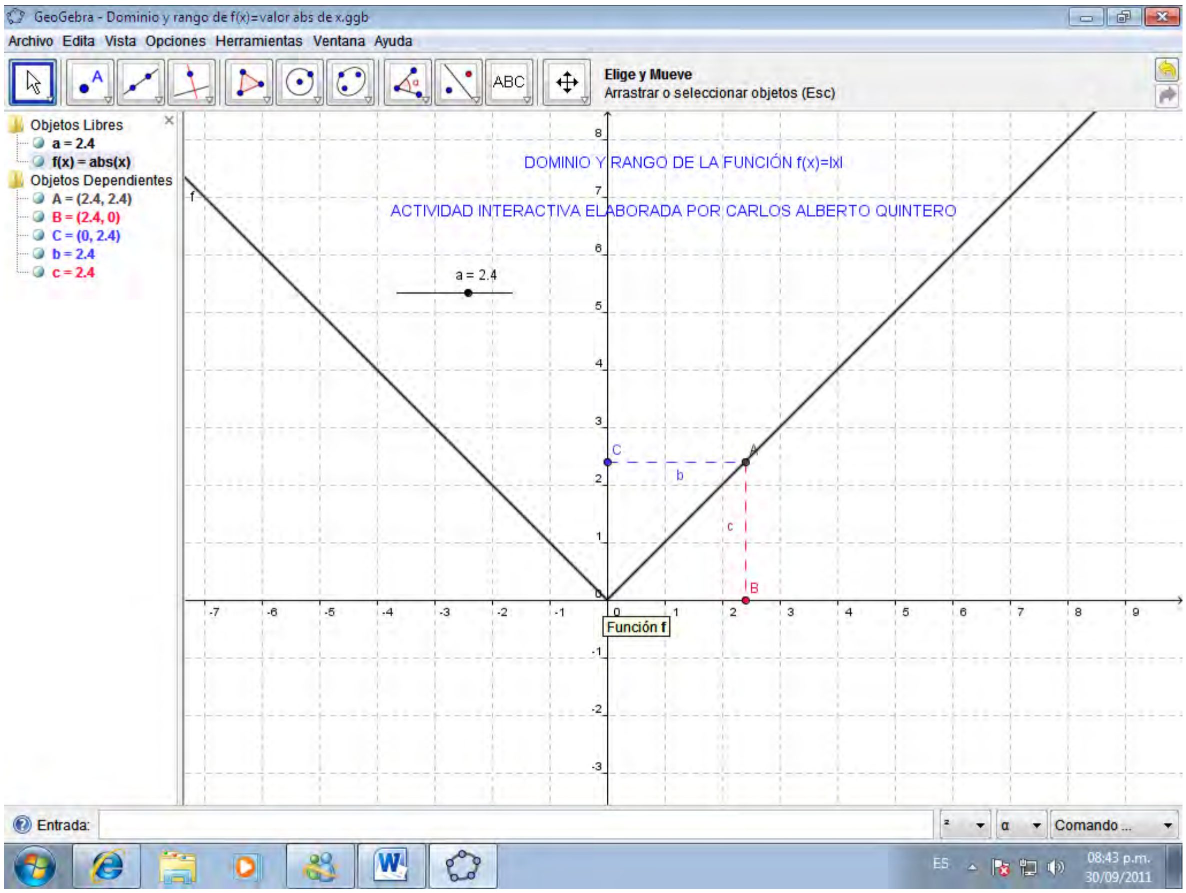
En tanto, $x + y = 100$ y si despejamos x, resultaría $x = 100 - y$. Luego reemplazamos x en la ecuación $x^2 + y^2 = s$, lo que sería igual a $(y - 100)^2 + y^2 = s$, aplicando diferencia de cuadrados esto sería $y^2 - 200y + 10000 + y^2 = s$, luego $2y^2 - 200y + 10000 = s$. Así tendríamos una cuadrática, lo que nos permitiría hallar los puntos mínimos a través de $y = \frac{-b}{2a}$, $y = \frac{-(-200)}{2(2)} = \frac{200}{4} = 50$, así tendríamos nuestro primer cuadrado, para hallar el otro reemplazamos y en la primera ecuación. $x = 100 - y$, $x = 100 - 50, x = 50$. Por lo tanto, la suma de ambos cumple la primera condición, y en efecto la segunda, ya que no existe otro par de números que satisfaga ambas.

En tanto, el par de números que responden a esta pregunta serían x=50 y y=50.

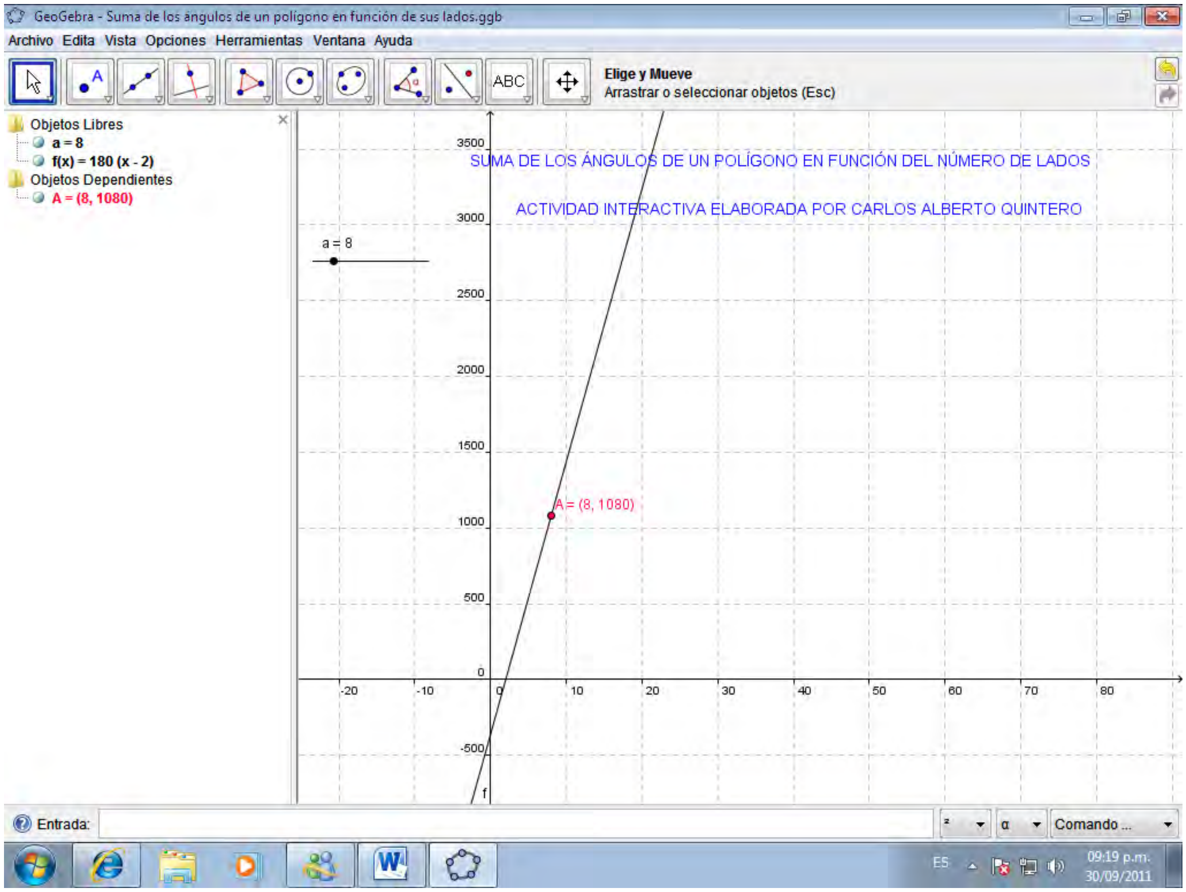
Anexo 33. Correo enviado desde la plataforma Moodle.



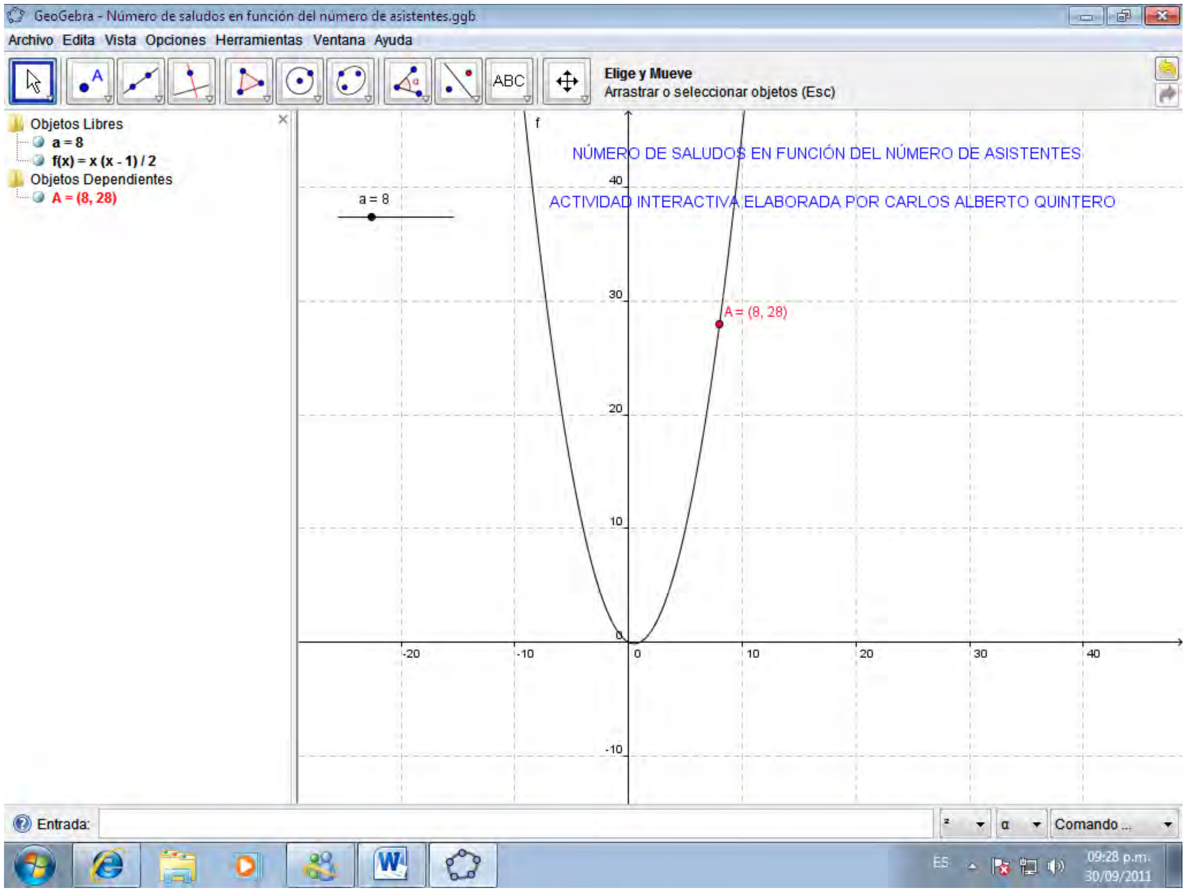
Anexo 34. Dominio y rango de la función f(x)=IxI.



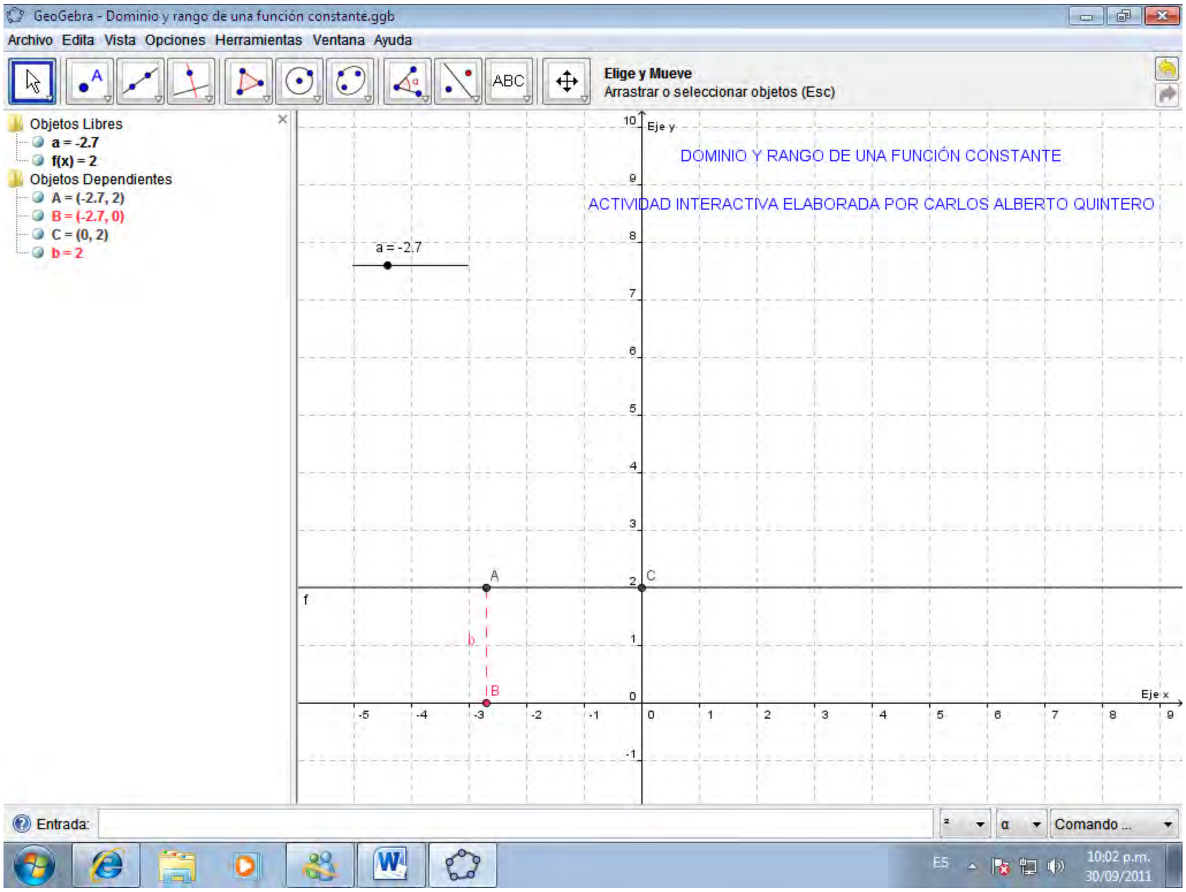
Anexo 35. Suma de los ángulos de un polígono en función del número de lados.



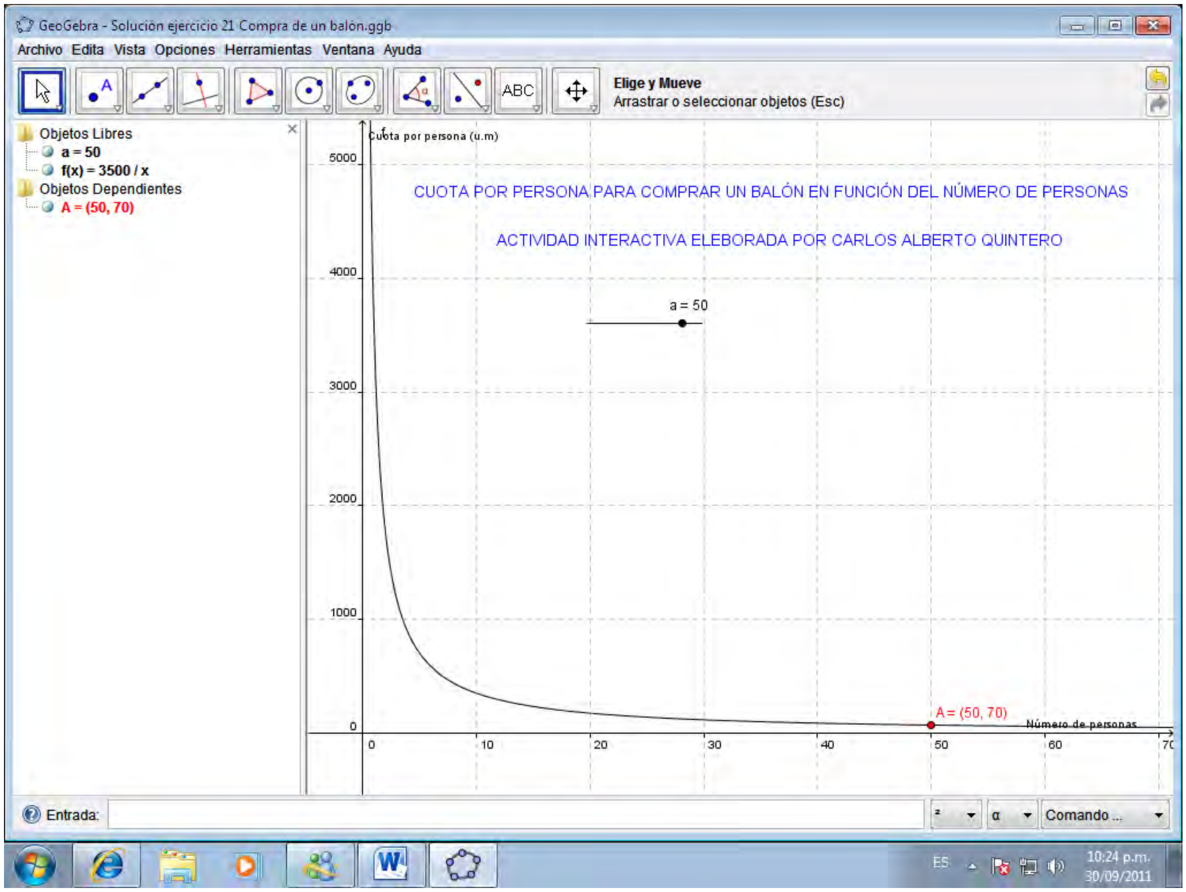
Anexo 36. Número de saludos en función del número de asistentes.



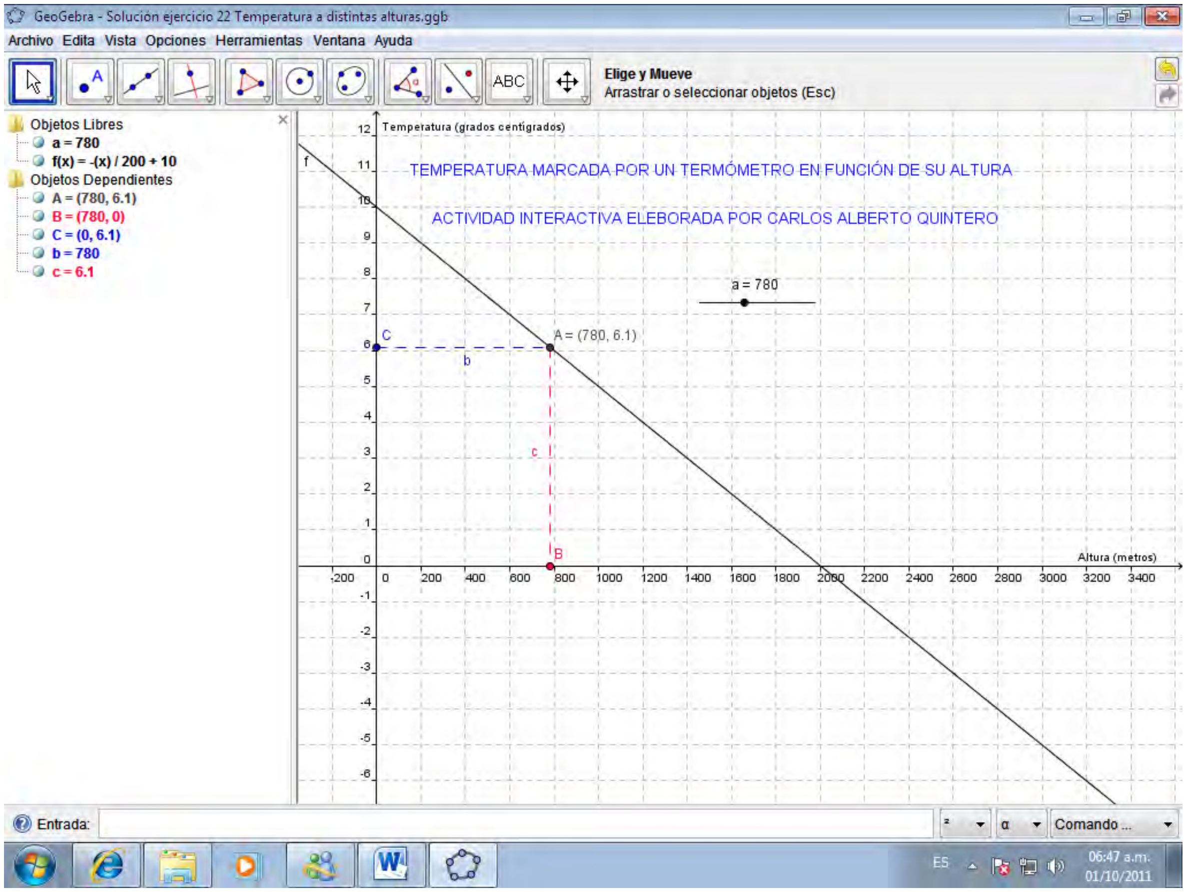
Anexo 37. Dominio y rango de una función constante.



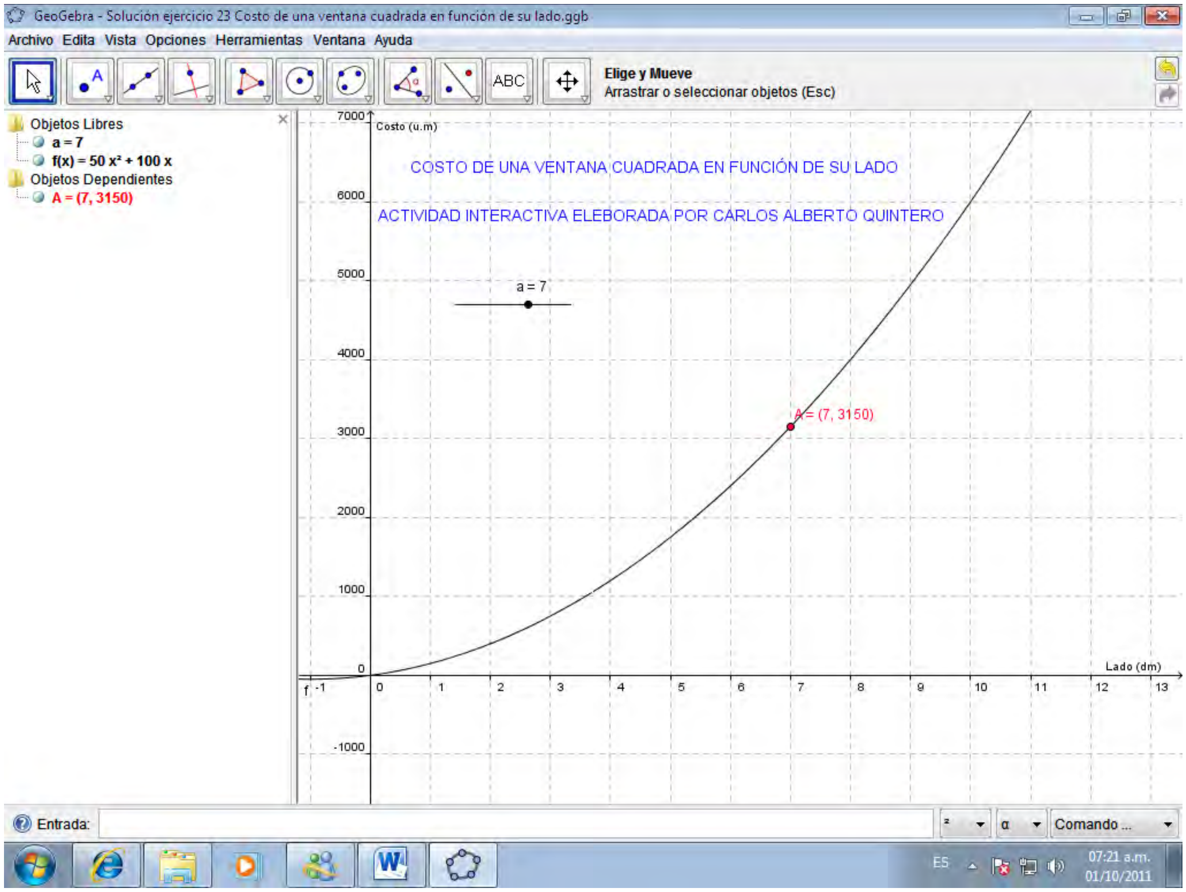
Anexo 38. Cuota por persona para comprar un balón en función del número de personas.



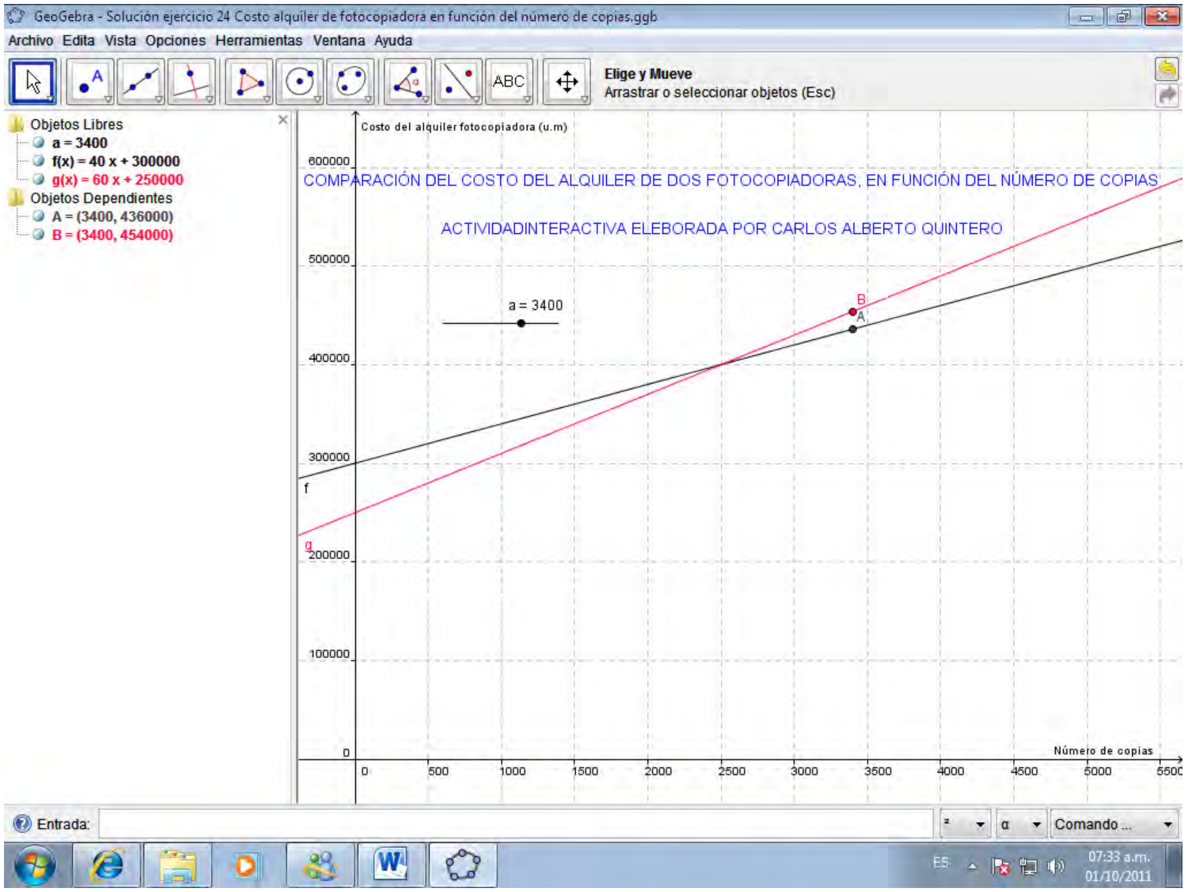
Anexo 39. Temperatura marcada por un termómetro en función de su altura.



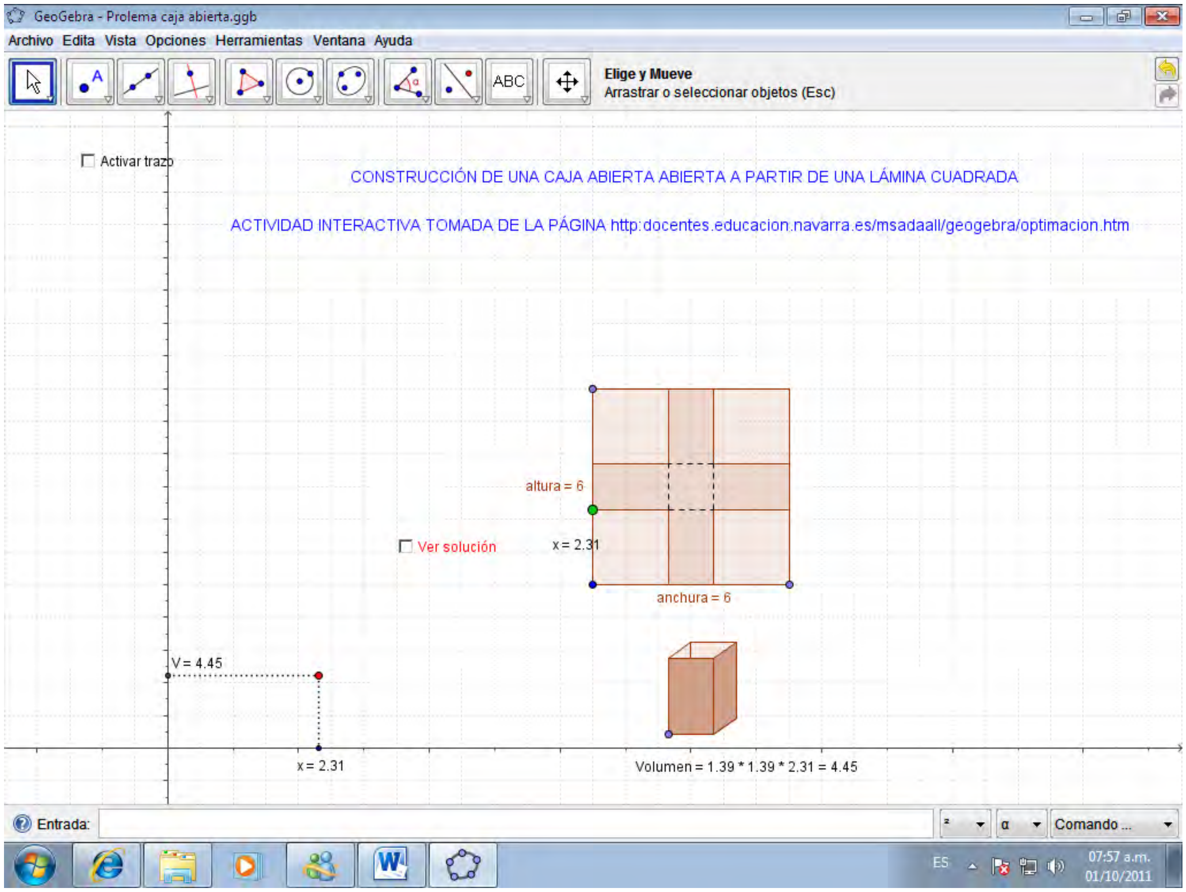
Anexo 40. Costo de una ventana cuadrada en función de su lado.



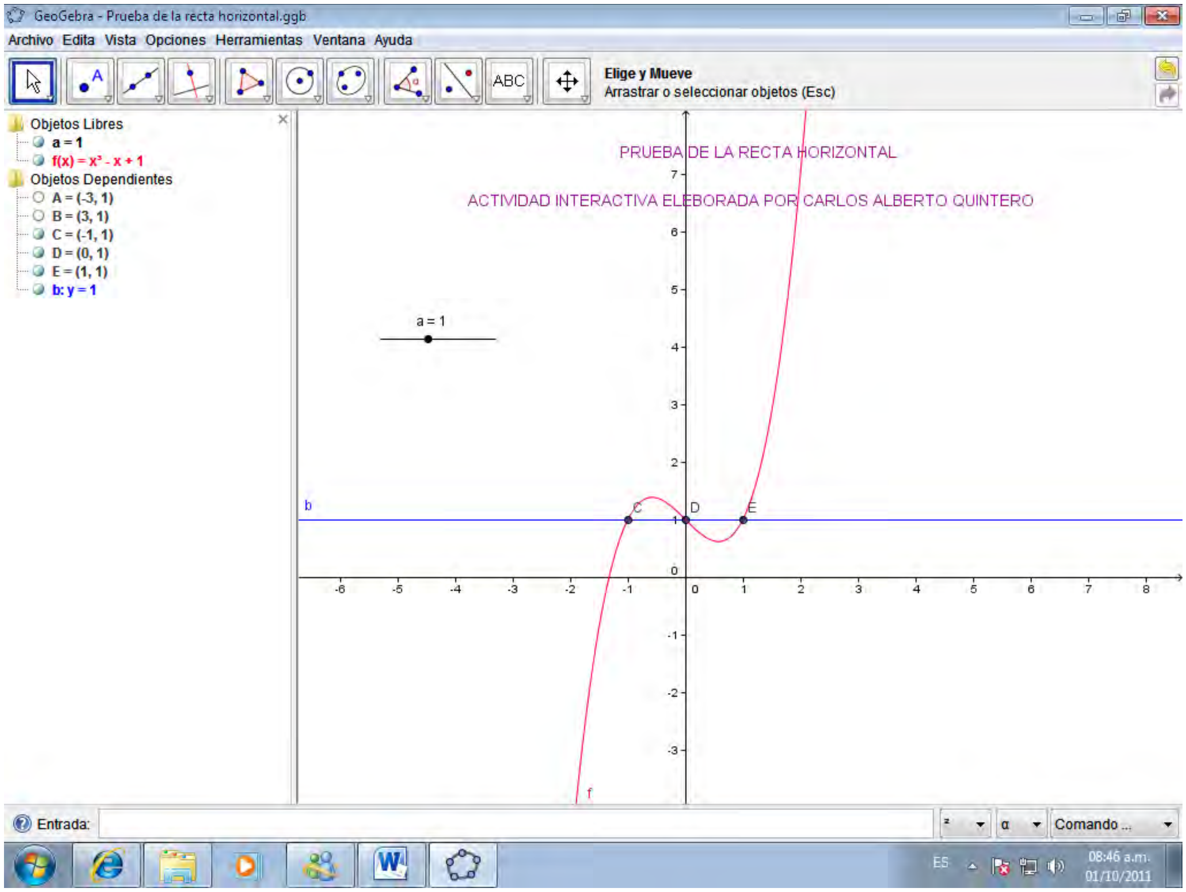
Anexo 41. Comparación del costo del alquiler de dos fotocopiadoras, en función del número de copias.



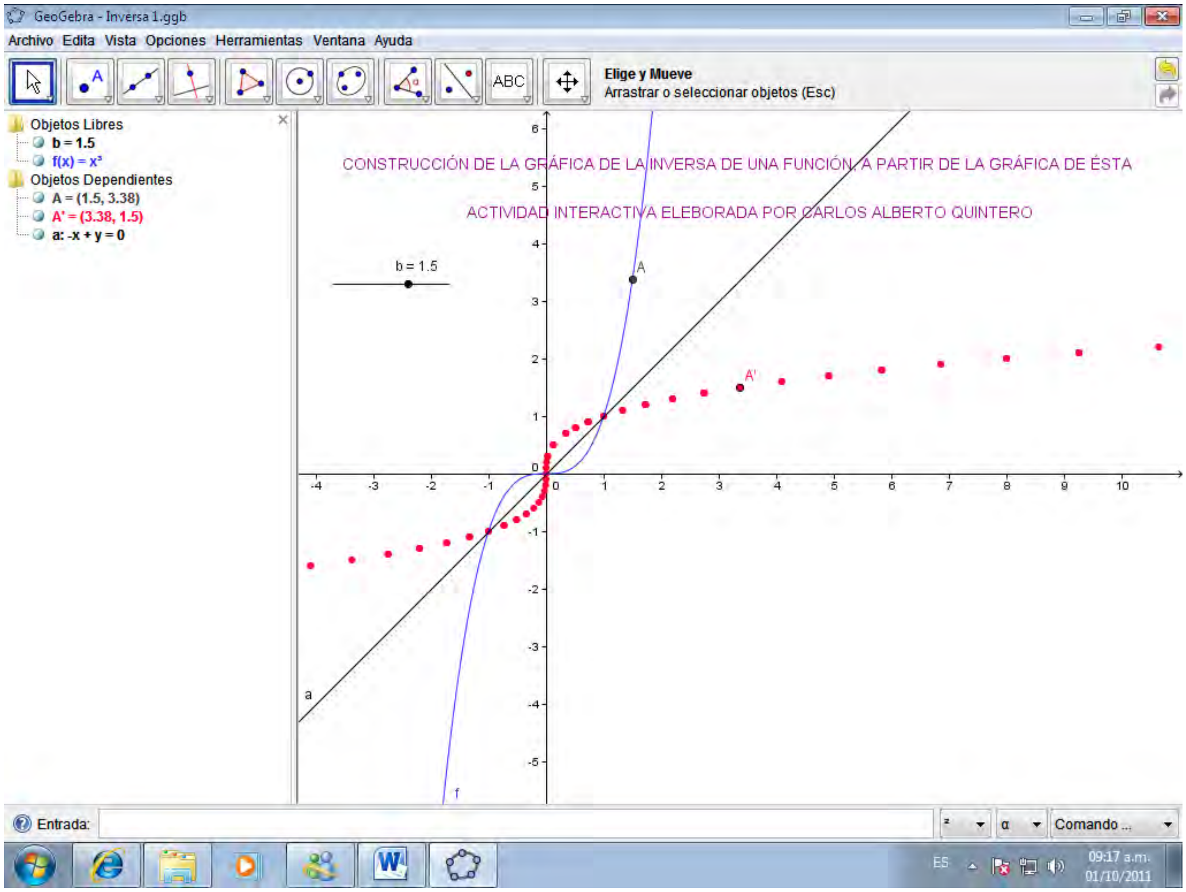
Anexo 42. Construcción de una caja abierta a partir de una lámina cuadrada.



Anexo 43. Prueba de la recta horizontal.



Anexo 44. Construcción de la gráfica de la inversa de una función, a partir de la gráfica de ésta.



Anexo 45. Objetivos y estrategias didácticas para la sesión # 16.

Sesión # 16: Funciones. Definición y conceptos relacionados.

Fecha de ejecución: 10 de marzo de 2011.

Objetivos:

- Determinar cuándo una regla de asignación entre los elementos de dos conjuntos es una función.
- Definir dominio, codominio y rango de una función.
- Dar significado a los símbolos propios de la notación funcional.
- Obtener modelos a partir de una tabla de valores de una función.

Estrategias didácticas empleadas:

- Se subió a la plataforma Moodle un cuestionario sobre el concepto de función (Anexo 17), el cual resolvieron los estudiantes previamente a esta sesión de clase. El cuestionario incluyó preguntas de verdadero o falso, múltiple opción y apareamiento.
- Se abrió un foro en la plataforma mencionada, en el cual el estudiante consignó sus dudas sobre las preguntas formuladas en el cuestionario, corrigió las preguntas mal desarrolladas e hizo un comentario a lo consignado por uno de sus compañeros.
- El desarrollo de esta sesión de clase inició con una discusión sobre el cuestionario y el foro. También se discutieron los ejemplos 3, 7 y 8; y los ejercicios 6, 7 y 16 del material didáctico escrito por el autor de este trabajo.

Anexo 46. Objetivos y estrategias didácticas para la sesión # 17.

Sesión # 17: Gráfica de una función.

Fecha de ejecución: 15 de marzo de 2011.

Objetivos:

- Construir la gráfica de una función.
- Utilizar "La prueba de la recta vertical" para determinar si la gráfica de una relación corresponde a una función.
- Determinar a partir de la gráfica de una función real de variable real, su dominio y su rango.
- Leer e interpretar gráficas de funciones.
- Construir la gráfica de una función real de variable real que satisfaga ciertas condiciones dadas.

Estrategias didácticas empleadas:

- El autor de esta trabajo elaboró nueve actividades interactivas con el programa GeoGebra, a saber, prueba de la recta vertical (Anexo 27), dominio y rango de una función a partir de su gráfica (Anexo 28), lectura e interpretación de gráficas (Anexo 29), Altura de una pelota en función del número de rebotes (Anexo 30), gráfica de la función f(x)=sqrt(x^2-16) (Anexo 31), dominio y rango de f(x)=IxI (Anexo 34), suma de los ángulos de un polígono en función de sus lados (Anexo 35), número de saludos en función del número de asistentes (Anexo 36) y dominio y rango de una función constante (Anexo 37).
- Se hizo un trabajo de lectura e interpretación de una gráfica (Anexo 26).

Anexo 47. Objetivos y estrategias didácticas para la sesión # 18.

Sesión # 18: Algunos problemas en que intervienen funciones.

Fecha de ejecución: 17 de marzo de 2011.

Objetivos:

- Resolver problemas de aplicación que involucren el concepto de función.
- Establecer relaciones entre las distintas representaciones de una función.
- Expresar una variable que depende de dos variables independientes, en función de una sola variable independiente, y hallar el dominio admisible de la función de una sola variable independiente.

Estrategias didácticas empleadas:

- Se resolvieron teóricamente los ejercicios 21 a 25 que se proponen en el material didáctico escrito por el autor de este trabajo.
- Se verificó la solución obtenida en cada uno de los ejercicios 21 a 25 con el empleo de cinco actividades con el programa GeoGebra, a saber, cuota por persona para comprar un balón en función del número de personas (Anexo 38), temperatura marcada por un termómetro en función de su altura (Anexo 39), costo de una ventana cuadrada en función de su lado (Anexo 40), comparación del costo del alquiler de dos fotocopiadoras en función del número de copias (Anexo 41) y construcción de una caja abierta a partir de una lámina cuadrada (Anexo 42).

Anexo 48. Objetivos y estrategias didácticas para la sesión # 19.

Sesión # 19: Función cuadrática. Funciones definidas a trozos.

Fecha de ejecución: 22 de marzo de 2011.

Objetivos:

- Identificar una función cuadrática.
- Construir la gráfica de una función cuadrática.
- Determinar el valor máximo o mínimo de una función cuadrática.
- Obtener un modelo cuadrático a través del establecimiento de relaciones entre las variables presentes en un problema.
- Determinar la función cuadrática que satisface ciertas condiciones dadas.
- Construir la gráfica de funciones definidas a trozos.

Estrategias didácticas empleadas:

- Se completó una tabla de valores que relacionaba el largo, ancho y área de un rectángulo de perímetro 10 metros, para obtener el modelo cuadrático que permite encontrar el área de todos los rectángulos de perímetro 10 metros, en función de la longitud de su base y escoger entre todos éstos el rectángulo de mayor área (Anexo 24).
- Se verificó la solución del problema anterior con una simulación construida con ayuda del programa GeoGebra (Anexo 25).
- Se formaron grupos, y a cada uno de ellos se les asignó un problema de aplicación de la función cuadrática (Anexos 10 a 14). Cada grupo envió a través del correo que está en la plataforma Moodle, la formulación y solución dada al problema al resto de sus compañeros y al profesor (Anexos 32 y 33).
- Se discutieron el ejemplo 15 y el ejercicio 28 del material didáctico.

Anexo 49. Objetivos y estrategias didácticas para la sesión # 20.

Sesión # 20: Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas.

Fecha de ejecución: 24 de marzo de 2011.

Objetivos:

- Clasificar una función dada como inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.
- Utilizar “La prueba de la recta horizontal” para determinar si una función es inyectiva.
- Demostrar que una función, dada la fórmula que la define, es inyectiva.

Estrategias didácticas empleadas:

- Se empleó una actividad interactiva construida con el programa GeoGebra, a saber prueba de la recta horizontal (Anexo 43).
- Se propusieron algunas funciones para que por grupos, los estudiantes las clasificaran como inyectivas, sobreyectivas o biyectivas (Anexos 19 a 23).

Anexo 50. Objetivos y estrategias didácticas para la sesión # 21.

Sesión # 21: El concepto de función inversa.

Fecha de ejecución: 29 de marzo de 2011.

Objetivos:

- Utilizar las operaciones algebraicas básicas para encontrar la inversa de una función inyectiva.
- Construir la gráfica de la inversa de una función inyectiva, a partir de la gráfica de ésta.

Estrategias didácticas empleadas:

- Se empleó una actividad interactiva construida con el programa GeoGebra, a saber, construcción de la gráfica de la inversa de una función, a partir de la gráfica de ésta (Anexo 44).